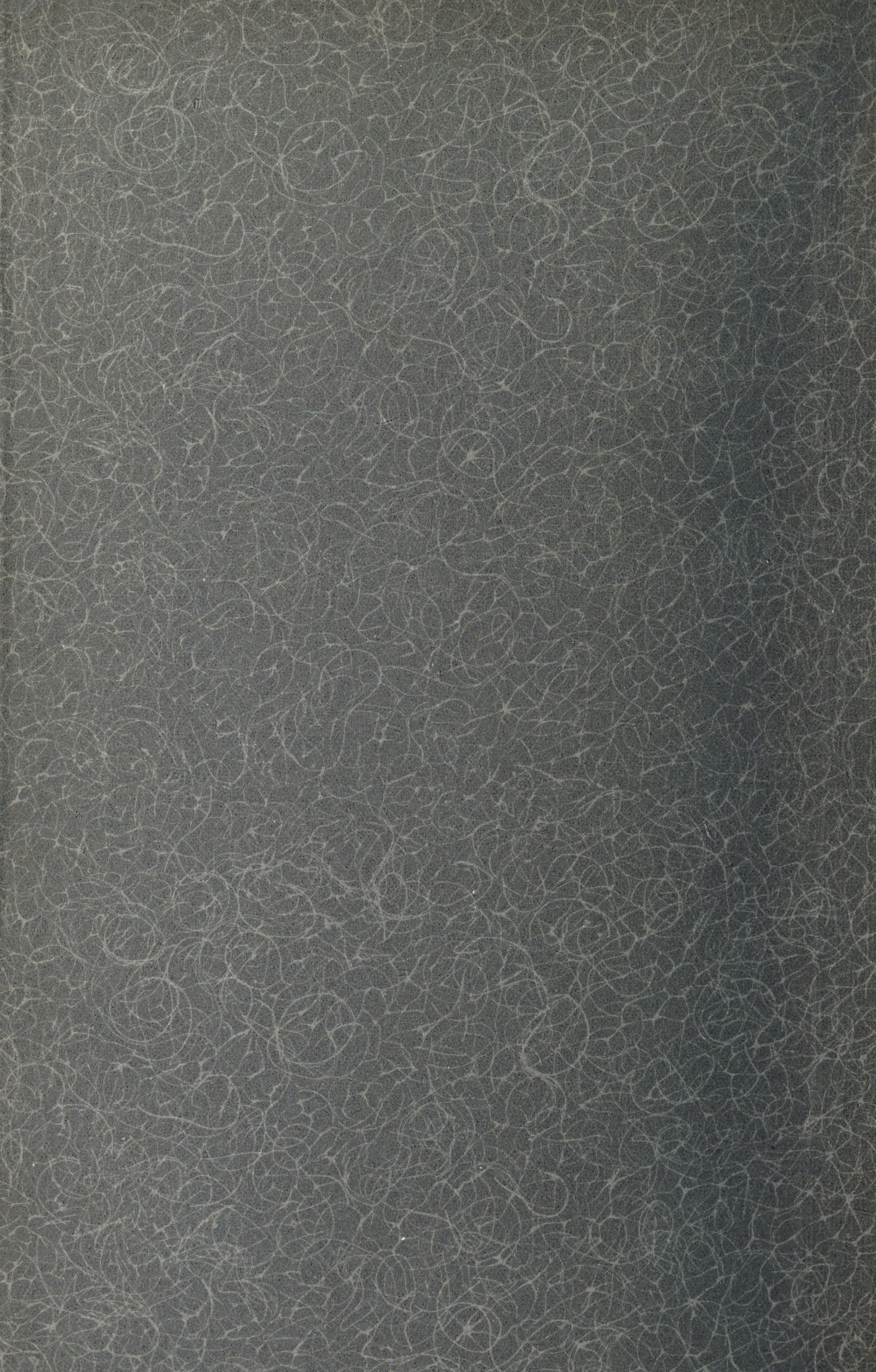

UNIVERSITY
OF
TORONTO
LIBRARY







Die Dimensionen des Raumes

Eine kritische Studie

von

Dr. A. Kirschmann
Professor an der Universität von Toronto, Canada

Leipzig
Verlag von Wilhelm Engelmann
1902

(Sonderausgabe aus: Wundt-Festschrift, Philosophische Studien. Band XIX.)

Inhalt.

Seite

Einleitung: Ueber Ausdehnung, Intensität und Messung . . 5

Erster Theil: Ueber die Motive zur Annahme einer vierten und höherer Dimensionen 12

I. Der mystische Gesichtspunkt 13

II. Der psychologische Gesichtspunkt 16

III. Der naturwissenschaftliche Gesichtspunkt 29

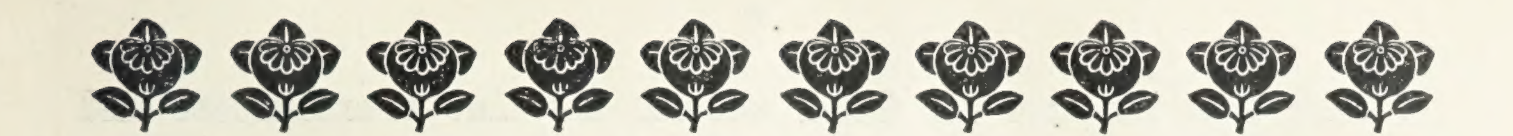
IV. Der mathematische Gesichtspunkt 39

Zweiter Teil: Kritik der Lehre von den Dimensionen 72

V. Definition des Dimensionsbegriffes 72

VI. Die Zahl der Dimensionen 79

Schluss 107



Einleitung.

Ueber Ausdehnung, Intensität und Messung.

Als die experimentelle Psychologie, die ihre gegenwärtige Bedeutung in erster Linie durch die Thätigkeit des Mannes erlangte, zu dessen Ehrung auch die nachstehenden Betrachtungen einen bescheidenen Beitrag liefern sollen, das Licht der Welt erblickte, da wurde auch ihr von einer ungütigen Fee ein böses Geschenk mit in die Wiege gegeben, nämlich das Problem oder das angebliche Problem der Messbarkeit psychischer Größen. Und da man gewöhnt war — aus Gründen, die einzusehen mir nie gelang — die Ausdehnung von dem Bereich des Psychischen auszuschließen und dem letzteren allein das Qualitative und das Intensive zuzuschieben, so stellte man die Frage wie folgt: »Können intensive Größen gemessen werden?« Man berief sich auf Kant, dem natürlich die nunmehr brennenden Fragen nach der quantitativen Beziehung zwischen Psychischem und Physischem eben so fremd waren wie den Rittern des Mittelalters das rauchlose Pulver, der aber irgendwo einmal gesagt hat, dass die Psychologie — worunter er aber etwas ganz anderes verstand als wir heute — niemals eine exacte Wissenschaft werden könne. Dabei aber vergaß man, dass derselbe Kant an viel hervorragenderer Stelle seines Systems als eine der wichtigsten Grundlagen der Erfahrung, als eine — in seinem Schema nur lose mit der Kategorie der Qualität in Verbindung gebrachte — Anticipation jeder Wahrnehmung das Axiom aufstellt: Alle Erscheinung hat eine intensive Größe, einen

Grad. Was ist aber ein Grad anderes als eine beurtheilbare und messbare Größe?

Nun hat aber die Physik seit Alters her mit mehr oder minder gutem Erfolg, wenn auch scheinbar indirect, intensive Größen, wie die Schwere, die elektromotorische Kraft, die Spannung, die Lichtstärke, die Wärme, gemessen, und es musste daher die Ableugnung der Messbarkeit intensiver Größen auf die rein psychischen Intensitäten beschränkt werden. Aber auch hier besteht sie zu unrecht. Wenn man nachweisen kann, dass eine kleine leuchtende Fläche, unbeschadet der genauen Erhaltung ihres Contrasteffectes, durch eine größere von entsprechend geringerer Intensität ersetzt werden kann, so dass eine feste Reciprocität zwischen Intensität und Ausdehnung stattfindet, so heißt das doch nichts anderes, als dass die psychische Größe der Lichtintensität und des Contrastes gemessen werden. Der Kampf gegen die Messung der Empfindung ist denn auch hauptsächlich von solchen geführt worden, die sich nicht selbst experimentell mit psychologischen Fragen befassten, und er wird heute nur von vereinzelten Außenstehenden fortgesetzt. Die experimentelle Psychologie ist längst über diesen Streit hinweg zur Tagesordnung übergegangen. Sie hat Probleme vorgefunden, die die bisherigen Wissenschaften nicht zu lösen vermochten, ja, kaum berührt hatten. Sie hat gefunden, dass diese Probleme quantitativer Natur und der exacten messenden Behandlung fähig sind, und sie hat sich unbefangen und unbekümmert um die Angriffe von Seiten derer, die sich nicht die Mühe nehmen Einsicht in die Probleme zu erlangen, an die Lösung begeben.

Während die Psychologie ihre denkwürdige Verwandlung aus einer abstracten und formalen philosophischen Disciplin in eine exacte Experimentalwissenschaft durchmachte, während sie den Kampf um die Messbarkeit intensiver Größen zu bestehen hatte und bestand, hat sich auch in derjenigen exacten Wissenschaft, die zugleich die Königin und die nützlichste Dienerin aller anderen ist, in der Mathematik, ein folgenschwerer Umschwung vollzogen. Während man schon lange des Besitzes einer rein arithmetischen Wissenschaft, einer reinen Größenlehre sich rühmte, die sich von jeder Abhängigkeit von der räumlichen Ausdehnung lossagte, und anderseits die Ausdehnung immer nur eine Unterabtheilung der Größe blieb, entstand nun

in der neueren synthetischen oder projectiven Geometrie eine neue Disciplin, die im Gegensatz zur metrischen Raumlehre ohne Größen und ohne Messung fertig zu werden vorgibt und einer neuen Auffassung Bahn bricht, wonach das Charakteristische der Ausdehnung als von dem Größenbegriff unabhängig aufzufassen ist. Nach dem Vorgange von Felix Klein u. A. muss die projectivische Geometrie geradezu als die allgemeine angesehen und der metrischen Raumlehre übergeordnet werden.

Wenn nun auf Grund der theoretischen Errungenschaften der modernen Mathematik und der experimentellen der Psychologie die Frage der Messung noch einmal aufgerollt wird, so richtet sie sich nun nicht mehr auf die Möglichkeit der Messung des Intensiven, sondern sie muss, den Spieß umkehrend, nunmehr lauten: »Messen wir denn im Grunde genommen je etwas anderes als intensive Größen?« und »Ist Ausdehnung überhaupt Größe, Quantität?« Versuchen wir im Nachstehenden diese radicale Umkehrung der Problemstellung zu begründen.

Zunächst ist nicht einzusehen, warum die räumlichen Eigenschaften der Empfindung weniger psychisch und mehr physisch sein sollen als die Intensität. Ist denn der Raum nicht subjectiv, im Kant'schen Sinne? Können wir je etwas wissen über einen objectiv, d. i. unabhängig von unserem Bewusstsein existirenden Raum? Und ist im Sinne Wundt's die Intensität nicht, eben so gut wie die Ausdehnung, subjectiv und objectiv zugleich? Ist überhaupt das Objective, das Physische, etwas anderes als eine gewisse Combination und mehr oder minder constante Beziehung von Bewusstseinsthatsachen? Man mag in einem veralteten Lehrbuch der Psychologie den Satz finden: »Unsere Vorstellungen vom Raume sind selbst nicht räumlich«, bei welchem wir uns heute nichts Vernünftiges mehr denken können. Wenn aber in einem ganz modernen Buche, wie Stout's *Analytical Psychology*, sich ähnliches vorfindet, so muss das doch sehr Wunder nehmen. Stout sagt: »Meine Vorstellung von einem Dreieck ist nicht dreieckig« und er fügt zur Erklärung hinzu »denn sie ist nicht aus Linien und Winkeln zusammengesetzt.« Wenn Stout wenigstens gesagt hätte: Das Ding an sich, welches das Dreieck (nämlich meine Vorstellung) hervorruft, ist vielleicht selbst nicht dreieckig, so ließe sich das noch verstehen, denn es hat größere Leute gegeben die

von dem Ding an sich sprachen und auf derselben Seite bewiesen, dass man von dem Ding an sich überhaupt nicht sprechen könne. Meine Vorstellung vom Dreieck ist doch das einzige Dreieck das ich kenne; und sie ist ganz gewiss dreieckig und aus Winkeln und geraden Linien zusammengesetzt. Es gibt für mich keinen andern Raum als den Raum meines Bewusstseins und ich kann mir auch beim besten Willen und bei größter Anstrengung keine Vorstellung von einem andern machen.

Hat somit die räumliche Ausdehnung bezüglich der Objectivität vor der Intensität der Empfindung nichts voraus, so fällt der Vergleich hinsichtlich der Anwendung des Begriffs der Größe noch ungünstiger aus. Wenn man gesagt hat, dass die Empfindung als intensive Größe der Messung nicht zugänglich sei, so hat man dabei meist stillschweigend zwei völlig grundlose und unberechtigte Annahmen gemacht; nämlich erstens dass »Größe« (und darum auch »Messen«) ein letzter nicht weiter zerlegbarer Begriff sei, und zweitens, dass es auch andere als intensive Größen gebe. Sehen wir zunächst was man unter Größe versteht. Man frage sich: Könnte es eine Größe allein geben? Offenbar nicht, denn nur durch den Vergleich mit etwas anderem wird etwas zur Größe. Das Vergleichen selbst ist aber keineswegs ein einfacher Process; es setzt das Unterscheiden voraus. Unter dem Unterscheiden verstehe ich nicht etwa das Ermitteln oder Bestimmen des Unterschieds, denn das ist ja gerade das Vergleichen, sondern den psychischen Befund: Dieses ist nicht das, es ist ein anderes. Nur was in irgend einer Weise verschieden ist, kann verglichen werden. Wenn zwei Bewusstseinsinhalte gar keine Verschiedenheiten aufwiesen, so wären sie identisch, d. h. sie wären gar nicht zwei Bewusstseinsinhalte, sondern einer und derselbe. Das Unterscheiden bezieht sich entweder auf die Qualität (wie bei gleichzeitig gehörten Tönen oder Geräuschen und bei Complicationen aus verschiedenen Sinnessphären) oder auf den Raum (wie bei der Unterscheidung simultaner sonst ganz gleicher Eindrücke) oder endlich auf Qualität und Raum zugleich (wie bei der Unterscheidung der Farben). Intensitäten können wir nur vergleichen, wenn sie zugleich räumlich oder zeitlich getrennt oder qualitativ verschieden sind. Und dabei muss die zeitliche Trennung oder Unterscheidung zuletzt auch auf den Raum zurückgeführt werden. Eine rein zeitliche Reihe von

verschiedenen Intensitäten ist nur dadurch möglich, dass die reproducirte Vorstellung des vorangegangenen Eindrucks entweder qualitativ von dem gegenwärtigen abweicht oder aber räumlich neben ihr zum Vergleich gedacht wird. Füllte eine einzige Empfindung das ganze Bewusstsein aus, so könnten wir reine Intensitätsänderungen an ihr nicht wahrnehmen. Das ist die consequente Folge des Relativitätsgesetzes, welches für alles, was den Charakter der Größe besitzt, sei es qualitativer oder intensiver Natur, gelten muss. Damit ist aber keineswegs der in Beziehung zu anderen stehenden intensiven Größe die Möglichkeit der stetigen Aenderung genommen, wie das Grassmann anzunehmen scheint, wenn er meint, dass »der Begriff der stetigen Aenderung des Elementes nur bei der Ausdehnungsgröße hervortreten« könne[1]).

Das Vergleichen bezieht sich auf den Grad der Verschiedenheit[2]). Das fundamentale Urtheil lautet hier: Dieses ist größer, mehr, oder kleiner, weniger als das. Es betrifft also die Intensität oder bei qualitativer Verschiedenheit den Grad der Aehnlichkeit. Nun behaupte ich: Während sich das Unterscheiden immer auf qualitative oder Raumverschiedenheiten bezieht, ist das Vergleichen, welches die Unterscheidung nothwendig voraussetzt, stets eine Intensitätsfrage, auch wenn es sich um extensive Größen handelt. Wenn wir eine Strecke oder Entfernung größer als eine andere wahrnehmen, so fällen wir das betreffende Urtheil auf Grund der Intensität entweder direct bei der Wahrnehmung der zu vergleichenden Raumgrößen betheiligter oder reproducirter Empfindungen specifischer Art (es bleibt sich hier gleich, welchen Namen dieselben tragen, Muskelempfindungen, Innervationsempfindungen, Bewegungsempfindungen u.s.w.). Auch bei den feinsten Präcisionsapparaten, bei welchen, wie man sich auszudrücken beliebt, die Ungenauigkeit der menschlichen Sinnes- und Bewegungsorgane eliminirt ist, liegt sowohl bei der Herstellung

---

1) Grassmann, Die lineare Ausdehnungslehre (Ausgabe von Fr. Engel), S. 28.

2) Es bleibt sich bei dieser Betrachtung gleich, ob man die »Verschiedenheit« in dem geläufigen Sinne oder der ihr von Meinong gegebenen Bedeutung auffasst (Meinong, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinne, XI, S. 81 ff.). Aber das »Unterscheiden« hat in dem hier angewandten Sinne mit dem »Unterschied« nichts zu thun. Es lässt sich leider für diesen primitivsten psychischen Act nicht leicht ein anderes Wort finden.

des Instruments wie bei der Ablesung in letzter Instanz eine solche Zuhülfenahme durch den Gesichts- oder Tastsinn vor. Das hat auch Meinong im Auge, wenn er sagt, dass jede Messung psychisch, nie rein physisch sei und dass gerade der psychische Antheil meist das Exacte ausmache[1]).

Es gibt demnach keine rein extensiven Größen. Was an der Ausdehnung Größe ist, das ist im letzten Grunde doch Intensität. Das Charakteristische der Ausdehnung ist nicht Größe. Alle Größe setzt Intensität voraus, aber die Ausdehnung ist nicht ein specieller Fall der Größe, obgleich sie die Größenbetrachtung auch zulässt.

Das Messen oder die Bestimmung von Größen ist kein einfacher Process, sondern setzt sich aus dem Unterscheiden und Vergleichen zusammen. Auch die Zahl ist das Product wiederholten Unterscheidens und Vergleichens. Rein Extensives lässt sich zwar unterscheiden, aber nicht messen. Es benöthigt den Hinzutritt des Intensiven, um Messung möglich zu machen. Selbst wenn wir qualitativ Verschiedenes zählen, so kann das nur geschehen, indem wir die Einheiten vergleichend unter einem gemeinsamen, wenn auch noch so weiten Begriff zusammenfassen.

Da nun das Vergleichen Unterscheiden voraussetzt, das Unterscheiden aber entweder qualitativ oder räumlich ist, das Qualitative aber nur in so fern zur Behandlung als Größe Anlass geben kann, als es sich von irgend einem Standpunkte nach Art der Intensität betrachten lässt, so setzt die Messung, obgleich sie sich auf die intensive Seite bezieht, doch die Extensität voraus. Die zu vergleichenden Dinge, das zu Messende und das Maß, müssen extensiv getrennt sein, also räumlich oder zeitlich. Wir haben aber weiter oben schon bemerkt, dass auch die Zeit, wenn als Ausdehnung betrachtet, auf den Raum zurückgeführt werden muss. Wenn wir von der Zeit als Extension sprechen, so müssen wir sie unter dem Bilde räumlicher Ausdehnung vorstellen, und die Gesetze der Phoronomie besitzen Gewissheit nur, so weit die Zeit als räumliche Größe sich darstellen lässt.

Wir sehen somit, die bisher so stark betonte Scheidung in extensive und intensive Größen ist unhaltbar, weil den Thatsachen

---

1) Meinong, Zeitschr. f. Psychol. u. Physiol. d. Sinne, XI, S. 230.

nicht entsprechend. Alle Größe ist intensiv, und dennoch setzt sie die Ausdehnung, die extensive Trennung als conditio sine qua non voraus. Man kann daher auch nicht einfach mit Grassmann[1]) sagen, dass die intensive Größe durch Erzeugung des Gleichen, die extensive, d. i. die Ausdehnung, durch Erzeugung des Verschiedenen entsteht, denn die Erzeugung des Gleichen setzt schon die Raumverschiedenheit voraus. Aber bei Grassmann ist eben die Extension doch auch noch »Größe«. Die extensive Größe, die flüssig gewordene Combination, unterscheidet sich von der intensiven, der flüssig gewordenen Zahl, durch das »Auseinandertreten« der Elemente[2]). Dieses Auseinandertreten der Elemente ist das was wir Ausdehnung nennen. Eine reine Größenlehre unabhängig von der Ausdehnung (d. i. vom Raum), wie so viele Analytiker sie zu besitzen wähnen, ist demnach nicht möglich. Auch die reine Zahl, sei sie quantitatives (Cardinalzahl) oder Ordnungsprincip (Ordinalzahl), sei ihre Reihe als stetige oder als discontinuirliche aufgefasst, enthält stets Ausdehnung und Intensität.

Es ist eine andere Frage, ob eine reine Ausdehnungslehre, eine Raumlehre ohne jegliche Bezugnahme auf Größe, möglich ist. Da zwar die Größe der Ausdehnung als Vorbedingung bedarf, nicht aber umgekehrt, denn das Charakteristische der Ausdehnung (d. i. des Raumes) ist nicht Quantität, sondern Qualität, und zwar eine von allen anderen Qualitäten mehr verschiedene, als diese untereinander, nämlich die Qualität, die sich nicht anders ausdrücken lässt als: »dieser Ort im Raum ist nicht jener«, so darf diese Frage unbedingt bejaht werden. Eine solche Ausdehnungs- oder Raumlehre ist sehr wohl möglich. Sie hat sich jeglichen Gebrauchs der Größenbegriffe zu begeben. In einer solchen nichtmetrischen Geometrie darf es zwar Punkte, Linien und Ebenen, d. i. Orte, Richtungen und Richtungssysteme geben, aber keine Distanzen und Winkelgrößen. Es gibt in einer solchen Geometrie weder Größe noch Aehnlichkeit von Figuren; denn von der Gestalt, die ja theilweise auf Größenverhältnissen beruht, kann nur noch die Collineation übrig bleiben. In der That kommt die sogenannte Geometrie der Lage, die projective Geometrie

---

1) Grassmann, Ausdehnungslehre I (Engl. Ausgabe), Einleitung. S. 26.
2) Ebenda, S. 27.

trotz ihrer zuweilen der metrischen Anschauung entlehnten Ausdrucksweise, einer solchen nicht messenden Ausdehnungslehre sehr nahe.

Wir haben im Vorstehenden gesehen, dass der Raum unserer Anschauung ein zweifaches enthält, ein ihm ureigenes Qualitatives, das sich nicht näher bezeichnen lässt — es ist eben das specifisch Räumliche, die Ausdehnung — und ein mit Hülfe der Intensität in ihn hineingetragenes, die Größe. Die qualitativ-quantitative Doppelnatur, der wir bei der psychologischen Untersuchung des Gesichts- und Tastraumes begegnen, und die ihre klassische Darstellung in Wundt's Theorie der complexen Localzeichen erhalten hat, müssen wir also auch schon dem ohne Rücksicht auf specielle Sinnesgebiete von rein erkenntnisstheoretischen und mathematischen Gesichtspunkten aus untersuchten Raume unserer Anschauung zuschreiben.

Erster Theil.

Ueber die Motive zur Annahme einer vierten und höherer Dimensionen.

Wir sind gewöhnt, dem in unserer Sinnesanschauung gegebenen Raume drei Dimensionen zuzuschreiben, obgleich wir für die Dringlichkeit dieser Aussage zumeist keine andere Begründung als die allgemeine Gebräuchlichkeit derselben zu erbringen vermöchten. Die elementare Mathematik macht in ihren Sätzen und Deductionen von dem Begriffe der Dimension keinen nennenswerthen Gebrauch, und man kann sich sehr wohl vorstellen, dass Jemand die niedere Mathematik, also neben der Arithmetik die Planimetrie, die ebene und sphärische Trigonometrie und die Stereometrie ausgezeichnet beherrsche und anwende, ohne jemals von den drei Dimensionen des Raumes gehört zu haben.

Es ist daher wohl werth zu untersuchen, ob der Begriff der Dimension und ihre Dreiheit mit Nothwendigkeit auf die oben erwähnte qualitative Ureigenschaft des Raumes angewandt werden muss und unzertrennlich von ihr ist, oder aber, ob es sich um eine Eigenschaft handelt, die mit dem auf die Intensität gegründeten Begriff der Größe zusammenhängt und mit diesem unvermeidlich eingeführt werden muss, oder endlich, ob wir in der Dreidimensionalität lediglich

eine vom Gesichtspunkte des Oeconomieprincips mehr oder minder nützlich erscheinende conventionelle Annahme vor uns haben, die der Begründung in der Natur des Raumes ganz entbehrt.

Die Dreidimensionalität des Raumes pflegt gewöhnlich auch von Seiten des Mathematikers als selbstverständlich betrachtet zu werden und wird daher auch keiner eigentlich kritischen Erörterung unterzogen. Der Begriff der Dimension gewinnt ein höheres Interesse anscheinend erst da, wo man, über die gegebene Raumanschauung hinausgehend, von Systemen und Räumen von mehr als drei Dimensionen redet. Es dürfte sich daher empfehlen, ehe wir an unsere eigentliche Aufgabe, die erkenntnisstheoretische kritische Untersuchung der räumlichen Dimensionen herantreten, die Wege und Motive ins Auge zu fassen, die zu jenem Hinausgehen über die Dreidimensionalität und zur Annahme von »höheren Dimensionen« geführt haben, oder dazu führen könnten.

Es gibt vier verschiedene Standpunkte, die zur Construction metageometrischer Theorien Anlass geben können: einen mystischen, einen psychologischen, einen naturwissenschaftlichen und einen mathematischen Standpunkt. Die von dem ersten und letzten dieser Gesichtspunkte Ausgehenden wandeln auf längst ausgetretenen Pfaden; der psychologische Gesichtspunkt hat für Zöllner den Ausgangspunkt einer Theorie gebildet, und der naturwissenschaftliche Gesichtspunkt ist, trotzdem ihm im Grunde am meisten Berechtigung zuerkannt werden muss, nur ein möglicher geblieben, da er meines Wissens keinen Vertreter gefunden hat.

I. Der mystische Gesichtspunkt.

Der mystische Gesichtspunkt ist im wesentlichen identisch mit demjenigen der Spiritisten und durch die Schriften Zöllner's und die sich daran knüpfenden Controversen hinlänglich bekannt. Wir dürfen uns daher auf einige Bemerkungen beschränken, die thatsächlich Unrichtiges in den Grundannahmen betreffen, und verweisen hinsichtlich der allgemeinen Ablehnung auf die Arbeiten von Wundt[1]), der in ebenso entscheidender wie humorvoller Weise die Absurdität

1) Essays: Der Spiritismus.

eines solchen Geisterlebens in der vierten Dimension dargethan hat. Es wäre in der That kein beneidenswerthes Leben nach dem Tode, wenn wir annehmen müssten, dass die Seelen unserer lieben Abgeschiedenen gewissermaßen als Sclaven eines für Geld sich producirenden spiritistischen Mediums auf dessen Befehl an Tische und Wände klopfen, Ziehharmonikas spielen, in der fehlerhaften Orthographie des Mediums Geisterhandschriften auf Schiefertafeln schreiben, verwickelte Knoten lösen und allerhand andere Kunststückchen ausführen müssten, die im Variété-Theater ein geschickter Zauberkünstler ohne spiritistische Prätensionen meist besser macht. Aber, sagt man, die vierdimensionalen Geister sollen auch Größeres vollbringen, dessen der lediglich auf Sinnestäuschungen ausgehende Escamoteur nicht fähig ist, sogenannte Materialisationen und Durchdringungen. Wenn wir einen Knoten (einen echten natürlich) in eine Schnur machen und dann die Enden der Schnur versiegeln, so können wir den Knoten nicht öffnen, ohne die Siegel zu erbrechen. Oder wenn wir nach Anbringung des Knotens die Enden der Schnur zusammenweben, so muss der nun entstandene Ring seinen Knoten behalten wie ein Helmholtz'scher Wirbel. Nun wird behauptet, die Wesen der vierten Dimension könnten einen solchen dreidimensionalen Knoten, ohne die Siegel zu verletzen oder den Ring aufzuschneiden, durch »Circumversion« in der vierten Dimension mit derselben Leichtigkeit öffnen, mit der wir mit Hülfe der dritten Dimension eine »zweidimensionale Schleife« auflösen, ohne deren befestigte Enden anzutasten. Ein gewisser Herr Slade, der mit den Eigenschaften eines spiritistischen Mediums in hohem Grade diejenigen eines geschickten Taschenspielers verband, soll auch einmal in einer Sitzung vor einer Anzahl von berühmten Leipziger Professoren seine Geister dazu vermocht haben, die erwähnte vierdimensionale Knotenlösung zu bewerkstelligen. Wenn ich mich aber recht erinnere, waren dabei auf Seiten der meisten anwesenden Gelehrten berechtigte Zweifel an der legitimen Herkunft des fraglichen Knotens entstanden.

Man sagt: So wie etwaigen zweidimensionalen Wesen, die in einer Ebene existirten, die Oeffnung der Schleife ein Wunder bleiben musste, so ist für uns die Lösung des dreidimensionalen Knotens für immer unverständlich. Aber diese Analogie ist eine durchaus schiefe und unberechtigte. Wenn wir die Schleife durch Herausnehmen aus der

Ebene in die geöffnete Curve überführen, so verschwindet sie theilweise für die Dauer der Procedur aus der Ebene und kann so lange von den angeblichen zweidimensionalen Wesen nicht wahrgenommen werden. Für diese imaginären Flachwesen müsste ein Stück der Schleife für eine Zeit lang ganz aus ihrem Raume verschwinden und dann an einer anderen Stelle in veränderter Form wieder auftauchen. Ganz anders bei den vierdimensionalen Materialisationen der Geister. Da verschwinden die betreffenden Knotentheile u. s. w. nicht für eine Zeit lang aus dem dreidimensionalen Raume, um nachher in verändertem Zustande wieder aufzutauchen, sondern sie müssen während der Arbeit der Geister durch Ueberdecken eines Tuches oder durch Anwendung von Dunkelheit, also ganz nach Taschenspielerart, den Blicken der Zuschauer entzogen werden.

Diese ganze Argumentation von dem Knoten und der Schleife leidet an einer falschen Prämisse. Man sagt: Wir können durch Circumversion in der dritten Dimension eine zweidimensionale Schleife öffnen und zwei congruente aber symmetrische Dreiecke zur Deckung bringen. Das ist einfach nicht wahr. Wir können es nicht. Ist die Schleife als ein Band von unendlich geringer Dicke oder der Dicke 0 gedacht, so liegen an der »Kreuzungs«-Stelle nicht etwa zwei Flächen wie Riemann'sche Spiralen übereinander, sondern ein Theil der Gesammtfläche ist beiden Aesten, wenn man überhaupt ein Recht hat von solchen zu reden, gemeinsam. Selbst wenn es möglich wäre, Flächen als solche durch den Raum zu bewegen, so müsste doch ein Aufheben eines der beiden Aeste mit dem Zerreißen der Schleife gleichbedeutend sein; denn man kann doch nicht gleichzeitig einen Theil aus einer Fläche herausnehmen und denselben Theil auch darin lassen. Ist die Schleife aber nur eine Linie, so handelt es sich an der Ueberschneidungsstelle um einen gemeinsamen Punkt, für welchen dasselbe gilt wie für das gemeinsame Flächenstück der breiten Schleife. Zwar pflegt man in der Mathematik zu sagen, dass bei Berührungen zweiter Ordnung die beiden sich treffenden oder schneidenden Curven nicht einen, sondern drei benachbarte Punkte gemein haben; aber das ist eine dem Princip der Einfachheit dienen sollende ungenaue Ausdrucksweise. Denn »benachbarte Punkte« kann es überhaupt nicht geben. Besteht zwischen zwei Punkten eine Entfernung, so sind sie nicht benachbart. Besteht aber keine Entfernung zwischen

denselben, so sind es nicht zwei Punkte, sondern nur einer. Ein Punkt also verträgt keine Nachbarn, und wenn man ihm welche insinuirt, und wären es eine ganze Million, so verschlingt er sie alle und wird dadurch doch nicht fetter. Es ist demnach klar, die Bewegungen, die man als Circumversion bezeichnet, können nur mit allseitig ausgedehnten körperlichen Dingen, nicht aber mit Linien und Flächen ausgeführt werden. Es wird also in der dritten Dimension umgeklappt nur, was schon ohnehin dreidimensional ist. Wir können eine Schleife in einer Schnur, einem Bande, einem Stricke öffnen, nicht aber eine solche in einer mathematischen Linie. Ja, es gibt überhaupt keine solche zweidimensionale Schleife. Wenn wir in der Ebene von Schleifen sprechen, so tragen wir unberechtigter Weise dreidimensionale Associationen hinein in das, was in Wirklichkeit nur eine Zusammenstellung von Linien und geschlossenen Curven ist. Ebenso können wir symmetrische congruente Dreiecke nur dann durch Umklappen zur Deckung bringen, wenn dieselben als Grenzflächen an körperlichen Dingen auftreten. Es ist wichtig, sich hier darüber klar zu werden, dass man nicht allein solche Bewegungen mit Linien und Flächen nicht ausführen kann; man kann sich dieselben auch bei größtmöglicher Abstraction nicht einmal denken. Ist es aber schon unmöglich, zweidimensionale Gebilde in der dritten Dimension umzukehren oder den Process ihrer Umkehrung zu denken, so kann es auch keinen vernünftigen Sinn haben, diesen Umkehrungsprocess auf eine vierte und weitere Dimensionen auszudehnen.

II. Der psychologische Gesichtspunkt.

Auf psychologischer Grundlage entsteht ein Motiv für die Hypostasirung höherer Dimensionen aus der sehr verbreiteten Annahme, dass der Raum unserer Wahrnehmungen, der Vertheilung und Anordnung der percipirenden Endorgane des Gesichts- und Tastsinnes entsprechend, direct nur zweidimensional sei, während die dritte Dimension das Product eines auf Bewegung und Doppelauge zurückzuführenden Schlussverfahrens bilde. Bei Zöllner, der diese Anschauung adoptirt hat, ist der weitere Gedankengang ungefähr der folgende: Die dritte Dimension, die Tiefe, ist nur erschlossen, construirt, nicht

wirklich gegeben. Sind wir aber befähigt, eine nicht actuell gegebene Dimension über die beiden in der thatsächlichen Erfahrung vorhandenen hinaus, zu construiren, so sollte uns doch eigentlich nichts verhindern können, den Process des Schließens und Construirens noch weiter fortzusetzen und zur Annahme einer vierten, fünften, u. s. f. Dimension zu schreiten. Dieser Schluss ist ganz plausibel und sogar unanfechtbar, so lange kein Zweifel hinsichtlich der Prämissen besteht. Die Prämissen bestehen aus Annahmen, welche die ganze empiristische und ein Theil der nativistischen Schule mit Bezug auf die Theorie des Raumes vertritt. Mit diesen Annahmen steht und fällt also auch der Zöllner'sche Schluss. Ganz so leicht wie Hermann Schubert[1]) sich die Sache denkt, ist das Argument Zöllner's nicht aus dem Felde zu schlagen. In einem Artikel über die vierte Dimension argumentirt Schubert ungefähr wie folgt: Alle körperlichen Processe sind dreidimensional, der photochemische Process in der Retina macht davon keine Ausnahme. Das Retinabild hat wie alle Bilder eine wenn auch geringe Dicke und ist daher keineswegs rein flächenhaft. Nur mittelst einer Abstraction geben wir ihm in unserem Bewusstsein eine verschwindend geringe Dicke. Es ist wohl kaum nothwendig, eine auf so grober materialistischer Verwechselung des psychischen Thatbestandes und der körperlichen Parallelvorgänge beruhende Darstellung zu widerlegen. Selbst wenn wir die Retinavorgänge direct wahrzunehmen vermöchten (wie es ja theilweise bei den entoptischen Erscheinungen und dem Eigenlicht der Netzhaut der Fall ist) und selbst wenn diese Wahrnehmung sich auch auf die Tiefe der betreffenden Processe erstreckte, so bestände zwischen dieser Dreidimensionalität und derjenigen der wahrzunehmenden Objecte der Außenwelt noch gar kein Zusammenhang. Die flächenhafte Natur des Sehfeldes anzuzweifeln hätten wir damit noch kein Recht.

Wir haben also die Frage zu untersuchen, ob die Annahme, dass das direct Gegebene zweidimensional sei, zutrifft oder nicht. Für die reinen Empiristen, nach welchen die ganze Raumanschauung etwas Gewordenes, nicht ursprünglich Gegebenes ist, hat die Frage nicht dieselbe Wichtigkeit wie für die Nativisten. Dennoch aber beansprucht

---

1) The Monist, vol. III, p. 433 ff.

auch für sie das gewordene Flächenhafte einen höheren Grad von Unmittelbarkeit, oder besser einen geringeren Grad von Mittelbarkeit als die gewordene Tiefe. Wundt's genetische Theorie passt weder in die Schablone des Empirismus noch in die des Nativismus, da auch seine Raumtheorie von dem Grundgedanken seiner Theorie des psychischen Geschehens durchdrungen ist; dem Gedanken nämlich, dass für das psychische Geschehen das Gesetz der Erhaltung der Energie, der Satz von der Aequivalenz von Ursache und Wirkung, nicht gilt. Das psychische Gewordene enthält mehr als das Product der Zusammenwirkung seiner Ursachen. Wie bei allen großen Neuerungen, so passt auch hier das bisherige Schema der Classification nicht mehr. Auf denjenigen Theil des Gewordenen, der sich nicht aus den Bedingungen seines Werdens ableiten lässt, lassen sich die gewohnten Begriffe wie »a priori«, »a posteriori«, »angeboren« und »aus der Erfahrung stammend« nicht mehr anwenden.

Von den Nativisten kommen hier nur diejenigen in Betracht, die nicht drei, sondern nur zwei Dimensionen als ursprünglich gegeben erachten, während sie die dritte empiristisch erklären. Hierher gehören Max Kauffmann und Ebbinghaus, der in seiner Psychologie einem solchen partiellen Nativismus angelegentlich das Wort redet.

Bei dieser Gelegenheit muss ich bemerken, dass mir die Gegenüberstellung von nativistischen und empiristischen Theorien im Grunde genommen nicht recht verständlich erscheint. Erstlich sind die Begriffe »angeboren« und »in der Erfahrung erworben« doch sehr complicirter Natur, und es ist daher nicht ohne weiteres sicher gestellt, dass sie selbst ohne Zuhülfenahme der fertigen räumlichen Anschauung überhaupt eine Bedeutung haben; jedenfalls müssten sie darauf hin erst gründlich untersucht werden. Zweitens aber schließen sich diese Begriffe gar nicht gegenseitig aus; ganz abgesehen davon, dass die nativistische und empiristische Schule sich gegenseitig weitgehende Concessionen machen. Das Angeborene ist doch auch geworden und erworben, wenn das individuelle Bewusstsein überhaupt einen Anfang hat; und das durch die Erfahrung Erworbene muss doch potentiell auch angeboren sein, um überhaupt erfahren werden zu können. Ist beispielsweise die Farbenqualität Roth angeboren oder erworben? Sie ist beides; denn wenn sie potentiell nicht angeboren ist (wie beim Rothgrün-Blinden), dann kann keine Erfahrung sie erzeugen; und

anderseits ist sie erst vorhanden, wenn sie wirklich erlebt wird. Was Raum und Zeit zu universalen Formen der Anschauung macht, ist nicht dass sie vor und außer aller Erfahrung — denn diese Begriffe sind ja selbst nur zeitliche und räumliche Bestimmungen in der Erfahrung — sondern, wie Wundt gezeigt hat, stets und überall mit der Erfahrung gegeben sind.

Ein folgenschwerer Irrthum wird von vielen Vertretern der nativistischen und empiristischen Ansicht begangen, indem sie den Raum unserer Wahrnehmung ganz oder zum Theil aus der räumlichen Anordnung der empfindenden Elemente der Retina und der Haut ableiten, die doch schon den ganzen Raum voraussetzt. Entweder nehmen sie einen objectiven Raum als gegeben an und wollen dann nur die Zuordnung zwischen räumlichen Objecten und räumlicher Wahrnehmung erklären, wozu es denn doch eigentlich keiner erkenntnisstheoretischen und metaphysischen Theorien, sondern lediglich der Geometrie und der psychologischen Optik bedarf. Oder aber sie berufen sich auf Kant's Lehre von der Subjectivität des Raumes und bewegen sich mit ihrer Erklärung im Zirkel.

Wenn man ohne Rücksicht auf die schiefe Unterscheidung des Nativismus und Empirismus das Raumproblem untersucht, so stößt man zuletzt auf drei Grundprobleme:

1. Das metaphysisch-erkenntnisstheoretische Problem, welches die subjective oder objective, die relative oder absolute Natur des Raumes betrifft. Die erste Frage lautet hier: Ist der Raum subjectiv oder können wir etwas von einem objectiven Raume wissen?

2. Das erkenntnisstheoretisch-psychologische Problem der elementaren oder complexen Natur des Raumes, dessen Hauptfrage lautet: Ist der gegebene Raum einfach und daher nicht definirbar und nicht erklärbar, oder lässt er sich aus anderen, nicht räumlichen Bewusstseinselementen ableiten?

3. Das psychologisch-physiologische Problem der Ordnung unserer räumlichen Wahrnehmung: Es lautet in seiner allgemeinsten Form: Welches sind die Thatsachen und Gesetze, die der eindeutigen und widerspruchslosen Zuordnung der räumlichen Wahrnehmungen zu einander und zu den übrigen Bewusstseinsinhalten zu Grunde liegen?

Ueber das erste Problem können wir hier ganz flüchtig hinweggehen. Es muss, soweit es die Wissenschaft angeht, seit Kant als gelöst betrachtet werden. Der Raum ist eine Bewusstseinsthatsache und von einem anderen Raume wissen wir nichts; obgleich wir in dieser Beziehung glauben dürfen was wir wollen, wenn es keinen Widerspruch enthält. Die Dinge der Außenwelt, auch wenn wir sie ganz unabhängig von uns zu denken suchen, sind doch, so weit wir mit Gewissheit Aussagen über sie machen können, nichts als Verknüpfungen von Bewusstseinsthatsachen. Von einem absolut Objectiven, also ohne jegliche Beziehung zum Bewusstsein Bestehenden, können wir nichts wissen; ja wir können es nicht einmal in unserer Phantasie berühren; denn sobald wir es könnten, nähme das Objective ja Theil am Bewusstsein. Es hat daher auch gar keinen Werth, das Wort objectiv in einem anderen Sinne als dem der Wundt'schen Lehre vom Vorstellungsobject zu nehmen, wo unter dem Objectiven, im Gegensatz zu dem anschaulich Subjectiven, das Product einer begrifflichen Abstraction und Construction zu verstehen ist. Von diesem Standpunkte aus ist der Raum unserer Anschauung zugleich subjectiv und objectiv.

Mit Bezug auf das zweite Problem glaube ich allerdings, dass alle Versuche den Raum aus etwas Elementarerem, Unräumlichem, herzuleiten, als verfehlt angesehen werden müssen. Man kann diese Versuche in drei Gruppen einreihen. Zu der ersten Gruppe gehören alle die Theorien, die den Raum auf die »Einheit oder Untheilbarkeit der Seele«, oder eine ähnliche allgemeine Eigenschaft des Bewusstseins zurückzuführen suchen. Solche aus den Tagen der rationalen Psychologie überkommene Ansichten besitzen jedoch heute keinen höheren Werth als etwa der Versuch, die Qualität Grün aus dem Begriffe der Farbe abzuleiten, und bedürfen kaum einer kritischen Widerlegung.

In die zweite Gruppe fallen die Bestrebungen, das Specifische der Raumausdehnung auf »Reihen«, »Bewegung«, »die Zeit« zurückzuführen. Diese Annahmen müssen sich nothwendig im Zirkel bewegen, denn alle diese Begriffe, einerlei ob man dabei überhaupt nicht an Ausdehnung denkt, oder ob sie einen allgemeinen Fall der Ausdehnung repräsentiren sollen, setzen den Raum voraus. Bei Reihen erscheint das zwar auf den ersten Blick am wenigsten plausibel.

Man sagt, es gebe rein zeitliche Reihen. Das muss aber bestritten werden. Denn die Zeit kann nur insofern als ausgedehnt betrachtet werden, als sie nach Analogie des Raumes aufgefasst wird. Es ist nicht richtig, dass die Zeit sich uns als eindimensionales Gebilde präsentirt oder dass wir sie als »eindimensionales Erstrecken« erleben[1]). Die Vergangenheit, so weit sie Gegenstand des Wissens, ist gegenwärtig als Bewusstseinszustand, als ein Theil des Jetzt, das gar keine Zeit ist[2]). Gegeben ist immer nur das Jetzt. So weit die raumpercipirenden Sinne in Frage kommen, besteht dieses Jetzt zu einem Theil aus Vorstellungen mit fester widerspruchsloser räumlicher Localisation, die wir gewöhnlich »wirkliche« Eindrücke, Wahrnehmungen zu nennen pflegen, und anderseits aus Vorstellungen, die zwar ebenso wohl wirklich und unmittelbar gegeben sind, die aber, obgleich räumliche Eigenschaften aufweisend, die Eigenschaft der widerspruchslosen Localisation im Raume nicht besitzen, und die außerdem, obschon das nicht als wesentliches Merkmal gelten kann, oft an Intensität hinter den ersteren zurückstehen. Diese letzteren pflegt man gewöhnlich mit dem Namen Erinnerungsbilder oder reproducirte Vorstellungen zu belegen. Die Vergangenheit und Zukunft sind nur, so weit sie Theile der Gegenwart sind, Wahrnehmung, Wissen, Gewissheit, im Uebrigen aber Sache des Glaubens.

Aber selbst wenn die Zeit ohne Analogie mit dem Raume ein Ausgedehntes wäre, so gäbe es dennoch keine rein zeitlichen Reihen. Der Wechsel der Glieder einer Reihe kann sich bei Ausschluss von Raumverschiedenheiten nur so vollziehen, dass da, wo erst *a* war, nachher *b* sich befindet. Eine successive Reihe von Gesichtseindrücken muss also mindestens irgendwo im Raume localisirt werden, und die Eindrücke müssen räumliche Größe haben. Auch die übrigen Sinnesempfindungen, selbst die Gemeinempfindungen, werden stets, wenn auch schwach und undeutlich räumlich — entweder innerhalb oder außerhalb des eigenen Körpers — localisirt. Und wenn auch einmal ein Gehörseindruck nicht in bestimmte Richtung verlegt werden kann, so wird er doch außerhalb oder innerhalb des Körpers in den umgebenden Raum versetzt.

Die Zeit ist demnach nicht geeignet als allgemeinere Voraussetzung

---

1) Ebbinghaus, Psychologie 1, S. 428.

2) Vgl. auch Volkmann, Lehrbuch der Psychologie, II, S. 12.

zu dienen, aus der der Raum als weniger elementare Erscheinung abzuleiten wäre. Im Gegentheil, sobald man die Zeit, das Princip oder Schema der Veränderung im Raume, selbst als etwas Ausgedehntes zu betrachten wünscht, so ist dies nur möglich, wenn sie nach Analogie des Raumes aufgefasst wird.

In die dritte Gruppe gehören die Ansichten, die den Raum auf rein intensive oder qualitative Verschiedenheiten zurückführen wollen. Hierher gehören die Localzeichen-Theorien, soweit sie überhaupt nicht nur die Ordnung im Raume, sondern auch den Raum selbst erklären wollen. Auch diese Theorien sind, soweit sie zur Intensität ihre Zuflucht nehmen, als ganz, soweit sie auf die Qualität zurückgehen, aber mindestens als zum Theil verfehlt anzusehen. Wir haben weiter oben schon gesehen, dass rein intensive Unterschiede nur unter gleichzeitiger Annahme extensiver Trennung möglich sind. Damit ist die Reduction des Räumlichen auf rein Intensives ausgeschlossen. Beruht aber das räumliche Nebeneinander auf qualitativen Verschiedenheiten, so ist nicht einzusehen, warum diese qualitativen Verschiedenheiten nicht, wie andere Qualitäts-Unterschiede, wahrgenommen werden als das, was sie sind. Ist es endlich die Verschmelzung dieser qualitativen mit intensiven Elementen, die das Räumliche der Empfindung zur Folge hat oder ausmacht, so bleibt es unerklärlich, warum nicht manchmal auch andere qualitativ-intensive Verschmelzungen, wie z. B. im Gebiete des Gehörsinnes, als räumlich ausgebreitet erscheinen. Es müsste also zu der qualitativen Verschiedenheit, zu der qualitativ-intensiven Verschmelzung noch eine Extra-Eigenschaft hinzutreten, die sie von anderen Qualitäts-Verschiedenheiten oder von anderen Verschmelzungen qualitativ-intensiver Art specifisch verschieden machte. Will man das aber einmal zugeben, dann darf man auch gleich hinzufügen, dass diese specifische Extra-Eigenschaft gerade das eigentlich Räumliche ausmache. Und dann ist die ganze Zurückführung auf Qualität oder Verschmelzung vergeblich gewesen. Jede Art von »localer Färbung«, man möge dieselbe definiren, wie man will, setzt den Raum doch schon voraus. Die Wundt'sche Localzeichentheorie, die, wie wir sehen werden, zur Lösung des dritten Problems Ausgezeichnetes leistet, bedarf daher einer gewissen Modification, um sie auch, von dem hier vertretenen erkenntnisstheoretischen Gesichtspunkte aus betrachtet, hinsichtlich des zweiten Problems unantastbar

zu machen. Man muss zu diesem Zwecke die Bestimmung fallen lassen, dass die specifischen qualitativen Verschiedenheiten, die die locale Färbung ausmachen, ursprünglich unräumlicher Natur seien. Man muss im Gegentheil annehmen, dass diese Qualitätsunterschiede von allen anderen Qualitäts-Verschiedenheiten toto genere verschieden sind. Mit anderen Worten, man muss annehmen, dass die Verschiedenheit zwischen allen anderen Qualitäten einerseits und diesen die Raumvorstellung bedingenden Qualitäten anderseits eine Verschiedenheit höherer Ordnung bilde. Dann aber hindert uns auch nichts, zuzugeben, dass diese ganz specifischen Qualitäten und Qualitätsunterschiede eben gerade das Charakteristische des Räumlichen, der Ausdehnung, sind. Diese ursprünglichen Raumqualitäten haben allerdings nichts von Größe, Entfernung etc. an sich; aber sie sind es gerade, die das Urtheil »dieses Ding ist nicht jenes Ding«, auch wenn sich die beiden Dinge sonst aufs Haar gleichen, möglich macht. So geht auch hier, wie Natorp[1]) sich ausdrückt, die Qualität der Quantität voran.

Mit anderen Worten: Als das Charakteristische der Ausdehnung darf nicht die Größe, die auf der Intensität beruht, angesehen werden, sondern etwas Qualitatives, das sich nicht anders (und auch dann nur unvollkommen) ausdrücken lässt, als durch Sätze wie: Dieses ist nicht das, dieser Ort ist nicht jener Ort, diese Richtung ist nicht jene u. s. w. Der Qualitätsbereich, der von allen anderen Qualitäten, also den Sinnes- und Gefühls-Qualitäten, in höherem Maße und auf andere Weise verschieden ist, als diese untereinander, das ist eben der Raum. Er ist schlechterdings einfach und direct gegeben und kann daher niemals definirt (d. h. beschrieben) oder erklärt (d. h. auf Einfacheres zurückgeführt) werden. Es müssen daher auch alle Versuche, den Raum aus Nichträumlichem abzuleiten, entweder den Stempel der Willkür und des Zirkelschlusses sichtbar auf der Stirn tragen oder aber zu unlösbaren Widersprüchen führen.

Was das dritte Problem, die eindeutige und widerspruchslose Ordnung der räumlichen Wahrnehmungen und Vorstellungen, anbelangt, so ist unzweifelhaft, wie schon oben angedeutet, die Wundtsche Theorie als die ungezwungenste und natürlichste zu betrachten.

---

1) Natorp, Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik, III. Arch. f. syst. Philos., VII, S. 373.

Die Theorie der complexen Localzeichen [1]) leistet das denkbar Mögliche und lässt auch hinsichtlich der verwickelteren Fragen des Gesichtssinnes, der binocularen und monocularen [2]) Tiefenwahrnehmung kaum etwas zu wünschen übrig.

Alle Einordnung unserer Wahrnehmungen in den Raum findet statt auf Grund des Zusammenwirkens der ursprünglich gegebenen Ausdehnungsqualitäten mit verschiedenen Systemen intensiver Elemente. Auf Grund der ersteren unterscheiden wir von vornherein Orte, Richtungen; mit Hülfe der letzteren beurtheilen, schätzen oder messen wir Größen und Entfernungen. Die räumliche Unterscheidung ist, wenn ich mich der bisher gebräuchlichen Bezeichnungen bedienen soll, angeboren, a priori; die auf der Vergleichung von Intensitäten beruhende Einordnung nach Größe, Entfernung u. s. w. ist a posterori, in der Erfahrung erworben. Wir haben weiter oben schon gesehen, dass die Ausdrücke »angeboren« und »erworben« erkenntnisstheoretisch unstatthaft sind. Dasselbe muss trotz seiner Gebräuchlichkeit von dem Begriffspaare a priori und a posteriori gesagt werden. Sollen diese Begriffe nicht rein zeitlich genommen werden, so müssen sie unter Bezugnahme auf die Unabhängigkeit und Abhängigkeit von der Erfahrung definirt werden. Die »Erfahrung« aber ist neben der »Realität« der unberechtigtste, vageste und trügerischste Begriff, den die Philosophie aufzuweisen hat, und selbst Kant hat ihn, ohne es zu merken, in verschiedenen Bedeutungen verwandt. Beide Begriffe, »Realität« (Wirklichkeit) und »Erfahrung« müssen entweder in einer, jeder Begründung unfähigen, ganz willkürlichen Weise definirt werden, oder aber sie lassen sich auf alles anwenden, den Widerspruch (der nach meiner Ansicht immer das Product der Lüge ist [3])) ausgenommen. Wollen wir also diese ebenso fragwürdigen wie landläufigen Gebrauchsstücke philosophischer Argumentation umgehen, so ließe sich das Gesagte folgendermaßen fassen: Die Ausdehnung, d. i. das Charakteristische, Qualitative der Raumanschauung ist schlechthin ursprünglich, einfach und unzerlegbar. Die Einordnung der Erlebnisse in den Raum geschieht unter der Zusammenwirkung von Ausdehnung und Größe;

---

1) Wundt, Physiolog. Psychologie, 4. Aufl., II, S. 232 ff.; Logik I, S. 512 ff.

2) Vgl. meine Abhandlung über die Parallaxe des indirecten Sehens. Philos. Stud., IX, S. 447—495.

3) C. E. Rasius, Rechte und Pflichten der Kritik 1898, S. 117 ff.

sie ist complex und der Differenzirung und Entwickelung fähig. (Damit ist natürlich nichts gegen die Apodicticität der die Größenverhältnisse betreffenden mathematischen Theoreme ausgesagt.)

Die von den Vertretern der Herbart'schen Schule in negativem, von Lotze, Wundt und Ebbinghaus aber im positiven Sinne beantwortete Frage, ob das in bewegungsloser Umgebung in absoluter Ruhe befindliche Auge räumlich sehen würde, muss daher im Sinne der letzteren Ansicht entschieden werden. Ein solches Auge hätte zwar keinerlei Veranlassung, Beurtheilungen über Größe und Entfernung anzustellen. Der räumlichen Unterscheidung aber wäre es von vornherein ebenso fähig wie der Unterscheidung von Hell und Dunkel, Roth und Blau. Es könnte von Anfang an wahrnehmen: Dieser Punkt ist nicht jener Punkt; diese Richtung ist eine andere als jene; dieser Punkt oder diese Richtung liegt zwischen jenen Punkten oder Richtungen. Das sind denn auch in der That die letzten Grundthatsachen, von denen die neuesten Behandlungen der Grundlagen der Raumlehre ausgehen [1]).

Die angeregte Frage wird gewöhnlich nur mit Rücksicht auf die flächenhafte Ausdehnung des Gesichts- und Tastfeldes aufgeworfen. Wie steht es nun damit bei Hinzuziehung der dritten Dimension? Diese Frage aber führt uns zu unserem speciellen Probleme zurück, zu der Behauptung Zöllner's, dass die Art und Weise, wie wir zur dritten Dimension gelangen, auch die Annahme einer vierten rechtfertige oder gar fordere.

Die flächenhafte Natur des Gesichtsraumes ist von Max Kauffmann [2]) und neuerdings von Ebbinghaus [3]) betont worden, welcher dabei die zweidimensionale Raumanschauung als etwas Ursprüngliches und Elementares annimmt. Er denkt sich die ursprüngliche Flächenwahrnehmung analog derjenigen, die wir haben, wenn wir in eine durchsichtige Flüssigkeit, in die Finsterniss eines Zimmers, in einen dicken Nebel, gegen den Himmel oder in die Gluth einer großen Flamme blicken [4]). Aber wenn nicht sichtbare Verschiedenheiten,

---

1) David Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals in Göttingen. 1899.

2) Immanente Philosophie. S. 10 ff.

3) Psychologie, I, S. 440.

4) Ebenda, S. 428.

kleine Helligkeits- oder Qualitätsunterschiede, im Falle des dunklen Schachtes oder Zimmers z. B. durch die am Rande sich allmählich verlierende Helligkeit der Wände hervorgerufen, auf eine Tiefe hinweisen, so sind diese Eindrücke doch von anderen zweidimensionalen nicht verschieden. Die Gluth wird als helle orangegelbe Fläche, der Nebel als graue und der Schacht als schwarzer Fleck gesehen. Der annähernd lichtlose Schacht ist wohl viel »schwärzer« als ein gemalter, der ja doch besten Falles nur dunkelgrau ist und noch die Schatten auf sich erkennen lässt[1]), aber er erscheint, wenn man das, was man thatsächlich wahrnimmt, nicht fälschlich durch das, was man zu wissen glaubt, corrigirt, rein flächenhaft. Ich habe mich davon einmal durch ein Scherzexperiment überzeugt, das ich bei Gelegenheit einer jener Festlichkeiten, wie wir sie jeden Winter einmal in der Universität zu Toronto abzuhalten pflegen, anstellte. Da sich unter den Gästen auch eine Anzahl Künstler befanden, so hatte ich eine Reihe von Helligkeitsstufen der farblosen Empfindungsreihe ausgestellt; sie bestand mit zwei Ausnahmen aus Pigmentpapieren, vom besten Weiß beginnend. Das drittletzte Glied war ein gutes schwarzes Papier, das vorletzte schwarzer Sammt, und das letzte war eine Oeffnung in einen ganz dunklen Raum. Diese Oeffnung unterschied sich ebenso gut von dem schwarzen Sammt, wie der letztere von dem schwarzen Papier. In einer darüber angebrachten Inschrift war auf die Wiedergabe dieser Intensitätsreihe in ihren richtigen Helligkeitsverhältnissen mittelst Wasserfarben auf Papier oder Oelfarben auf Leinwand eine Belohnung von 100000 Dollars ausgesetzt. Bei weitem der größte Theil der Beschauer verstand das Problem überhaupt nicht. Sie hielten die Oeffnung für ein gutes schwarzes Pigment, was sich in der Malerei ebenso gut wiedergeben lassen müsse wie die anderen. Viele aber, die die dunkle Oeffnung für »besseren« Sammt oder dergl. hielten, zogen die Hand erschreckt zurück, wenn sie bei dem Versuche, die vermeintliche schwarze Fläche zu berühren, keinen Widerstand trafen. Niemand aber sah ohne weitere Untersuchung durch den Tastsinn, dass es sich um eine Oeffnung in einen leeren Raum handelte.

---

1) Vgl. meine Arbeit über die ästhetische Bedeutung des Helligkeits- und Farbencontrastes. Philos. Stud. VII, S. 362 ff.

Wenn wir in eine durchsichtige Flüssigkeit oder einen Nebel blicken, so sehen wir entweder die Unregelmäßigkeiten, die Abweichungen von der Homogenität (beim Nebel in der ganzen Masse, beim durchsichtigen Medium vielleicht nur an der diesseitigen und jenseitigen Grenzfläche) oder wir sehen eine homogene Fläche. Hering hat darin ganz recht, dass in solchen Fällen meist genügende Andeutungen bestimmter Tiefen nicht gänzlich fehlen. Aber selbst wenn sie fehlen, so sehen wir hier wie bei jeder anderen Fläche, nicht etwa eine Fläche in »gar keiner« Entfernung, sondern eine solche in »unbestimmter« Entfernung.

Man lege sich doch einmal die Frage in dieser Form vor: Kann man überhaupt eine Fläche wahrnehmen, ohne sie in irgend eine, wenn auch ganz unbestimmte, Entfernung zu verlegen? Gesetzt der ursprünglich gegebene Raum des Gesichtssinnes sei eine Fläche. Es müsste natürlich eine Ebene sein, denn eine gekrümmte oder anderswie unebene Fläche setzt von vornherein die Tiefendimension voraus; eventuell ließe sich auch eine unendliche Kugelfläche noch acceptiren. Dann müssten sich alle Dinge der Wahrnehmung, auch der eigene Körper in dieser Fläche befinden. Obgleich man nun nicht sagen kann, dass wir das Ich im Raume localisiren, so geben wir doch dem jeweiligen Beobachtungsstandpunkt einen ganz bestimmten Platz im Raum. Bei monocularem Sehen verlegen wir ihn in einen Punkt der Augenaxe und beim binocularen in einen hinter der Mitte der die Mittelpunkte der Augen verbindenden Geraden. Wäre uns der Gesichtsraum nun ursprünglich als Fläche in »gar keiner« Entfernung gegeben, so müsste auch unser Beobachtungsstandpunkt nothwendiger Weise in dieser Fläche liegen. Denn wäre er außerhalb, so wäre uns ja von vornherein außer der Fläche noch anderes Räumliche gegeben. Es ist aber leicht einzusehen, dass wir von einem Beobachtungsstandpunkte in der Fläche überhaupt keine Flächen mehr wahrnehmen könnten, sondern nur noch Flächengrenzen, Linien. Wir müssten dann schließen, dass uns nicht einmal Flächen, zweidimensionale Gebilde, wirklich gegeben wären, sondern nur eindimensionale, Linien. Dann wäre also schon die zweite Dimension erschlossen, construirt; und es ist klar, dass wir selbst hierbei nicht stehen bleiben könnten; es müsste vielmehr auch der letzten Dimension des Raumes noch an den Kragen gehen, so dass überhaupt keine

mehr übrig bliebe und das wirklich Gegebene, der Raum, wie bei Cartesius die Seele, auf einen mathematischen Punkt zusammenschrumpfte.

Auch bei der Wahrnehmung einer Fläche gilt die Wundt'sche Lehre vom Vorstellungsobject, wonach die Zerlegung von Subject und Object ein Product nachträglicher Abstraction ist. In dem Augenblicke, wo ich eine Fläche wahrnehme, bin ich die wahrgenommene Fläche. Aber ich bin nicht nur die wahrgenommene Fläche, sondern auch außerdem noch vieles andere. Wenn nun das Andere, das ich gleichzeitig erlebe oder bin, sich nicht auch in jener Fläche befindet, so habe ich doch sofort mehr als einen zweidimensionalen Raum. Man sagt, der Mensch habe in seiner ersten Kindheit noch keine Tiefenvorstellung, denn das Kind greife nach dem Mond wie nach dem Apfel. Das beweist aber doch nur, dass noch keine messende Einordnung in der Tiefenrichtung stattfindet, nicht aber, dass diese letztere überhaupt nicht vorhanden ist.

Es ist vollständig richtig, dass unsere Licht- und Farbenempfindungen flächenhafter Natur sind. Aber die Wahrnehmung einer Fläche ist nur im allseitig ausgedehnten Raume möglich. Jede gesehene Fläche ist nur die (auf der von uns abgewendeten Seite befindliche) Grenze eines wahrgenommenen allseitig ausgedehnten Raumtheiles. Selbst unsere Erinnerungsbilder sind davon nicht ausgenommen. Trotzdem sie keine definitive Localisirung im Gesichtsfelde haben, so besitzen sie doch sowohl Ausdehnung wie Größe und werden stets in, wenn auch oft unbestimmte Entfernungen verlegt. Die dritte Dimension, wenn wir uns vorläufig dieser gebräuchlichen Ausdrucksweise bedienen, ist daher nicht erschlossen, construirt, sondern sie ist in jeder Flächenvorstellung unmittelbar vorhanden, auch wenn sie nicht der Gegenstand der Aufmerksamkeit und messenden Beurtheilung ist. Jede räumliche Wahrnehmung setzt »die dritte Dimension«, d. i. allseitige Ausdehnung voraus.

Wir haben im Vorstehenden gezeigt, dass die Voraussetzung Zöllner's, dass die dritte Dimension bereits das Product eines Schlussverfahrens sei, unhaltbar ist. Damit wird denn auch sein Schluss auf die Berechtigung der Annahme einer vierten Dimension hinfällig.

III. Der naturwissenschaftliche Gesichtspunkt.

In einem linearen Systeme kann jedes Gebilde unter Annahme des Princips der Relativität der Größe und der freien Beweglichkeit innerhalb des Systems in jedes andere Gebilde übergeführt werden. Aber nur so lange als man die Bewegung nur als Mittel der Transformation benutzt. Sobald man aber die Bewegung auch zur inneren Eigenschaft der Gebilde selbst macht, theilt sich jede Strecke in zwei antagonistische Richtungen, die sich gegenseitig aufheben, und die man willkürlich als rechte und linke oder positive und negative bezeichnen kann. Man kann eine rechte oder positive Strecke durch kein Verschieben innerhalb des Systems in eine linke oder negative verwandeln.

In der Ebene sind alle linearen Strecken und Bewegungsrichtungen in einander überführbar. Ueberdies werden die Richtungsunterschiede (Winkel) durch die Anwendung des Princips der Relativität der Größe nicht geändert. Dagegen gilt für Winkelbewegungen im zweidimensionalen System dasselbe, was für lineare Bewegungen im eindimensionalen gilt. Jeder Winkel kann in zwei verschiedenen Circularrichtungen durchlaufen werden, von rechts nach links und umgekehrt. Diese entgegengesetzten Circularbewegungen sind nun durch Verschieben in der Ebene nicht in einander überzuführen.

In einem linearen System gibt es keine Aehnlichkeit oder Unähnlichkeit von Gebilden, wohl aber Congruenz, d. i. Gleichheit in allen Stücken, ausgenommen dem Orte des Raumes. In einem zweidimensionalen oder ebenen Systeme heißen Gebilde ähnlich, wenn alle homologen Winkelbeziehungen gleich sind, congruent, wenn sowohl alle Winkel wie alle linearen Größen bezüglich gleich sind. Die Aehnlichkeit und Congruenz aber ist entweder eine directe oder eine symmetrische. Direct congruente Gebilde können durch einfaches Verschieben in der Ebene, direct ähnliche durch Verschiebung und Anwendung des Princips der Relativität der Größen — d. i. also durch entsprechende Vergrößerung oder Verkleinerung aller linearen Maße — in einander übergeführt werden. Symmetrisch ähnliche und symmetrisch congruente Gebilde können ohne aus der Ebene herauszugehen nicht in einander übergeführt werden.

In Raume sind alle linearen Gebilde und Bewegungen und ferner

Circularbewegungen der Ebene in einander überführbar. Ebenso können alle ähnlichen und congruenten Figuren der Ebene (die ähnlichen natürlich nur unter Aenderung des Maßstabes), einerlei ob direct oder symmetrisch ähnlich oder congruent, in einander übergeführt werden. Es gibt aber auch im Vollkörperlichen neben der directen eine symmetrische Congruenz und Aehnlichkeit. Zwei Körper können in allen ihren Theilen, in allen geraden oder krummen Flächen, Kanten und Ecken der Gestalt und dem Maß nach genau übereinstimmen und dennoch eine räumliche Ungleichheit übrig lassen, die sich nicht definiren lässt und die man nicht anders als willkürlich durch Ausdrücke wie rechts und links, positiv und negativ u. s. w., bezeichnen kann. Schon Kant hat in seinen Darlegungen über die Raumanschauung die erkenntnisstheoretische Wichtigkeit dieser Thatsache erkannt. Es müssen übrigens nicht nothwendiger Weise »Körper«, d. h. allseitig abgeschlossene Raumgebilde sein; auch bei gekrümmten oder gebrochenen Flächen gibt es solche symmetrische Congruenz. Wenn man beispielsweise ein unregelmäßiges sphärisches Dreieck auf die Fläche irgend eines durch die Kugel gelegten größten Kreises projicirt und die Projectionslothe verlängert, bis sie die Kugeloberfläche auf der anderen Seite treffen, so ist das dort markirte Dreieck symmetrisch congruent mit dem ursprünglichen. So verhalten sich auch die rechte und linke Hälfte des menschlichen Körpers, ein rechter und ein linker Schuh oder Handschuh, rechtsdrehende und linksdrehende Schraubengewinde, unsymmetrische Gegenstände und ihre Bilder im ebenen Spiegel u. s. w. Solche symmetrisch congruente Gestalten können nun durch keine Verschiebung im Raume in einander übergeführt werden, das heißt, es gibt kein Mittel, das eine von zwei solchen congruenten Gebilden so an den von dem anderen verlassenen Ort zu bringen, dass es dessen Stelle ausfüllt. Man mag eine rechtsdrehende Schraube drehen und wenden wie man will, man kann keine linksdrehende daraus machen. Nun ist dies ja auch gar nicht nöthig und die Welt verliert nicht viel daran, dass man nicht rechte Handschuhe und rechte Schrauben aus linken machen kann. Es gibt ja so viele Dinge, die wir einfach hinnehmen müssen, ohne sie unserem Willen beugen zu können. Wenn man nun die Theorie aufstellt, dass man mit Hülfe einer vierten Dimension auch die Ueberführung symmetrisch congruenter Körper vollziehen könnte, so hat

diese Theorie vorerst nicht mehr Werth als die Versicherung, dass man mit dem Stein der Weisen Kupfer in Gold verwandeln könne. Ueberdies sind ja Gegenstände wie rechte und linke Handschuhe, rechtsdrehende und linksdrehende Schrauben nur annähernd congruent. Auch kann man schließlich eine rechte Schraube einschmelzen und eine linke daraus gießen. Also die bloße geometrische Möglichkeit der Körper von symmetrischer Congruenz und selbst das Vorkommen wirklicher Gegenstände von solchen Formen sollte an und für sich noch keine Veranlassung zur Annahme einer vierten Dimension bilden. Ganz anders aber, wenn wir uns einer Thatsache gegenüber befinden, die uns vor die Alternative stellt, entweder eine derartige Annahme machen oder zugestehen zu müssen, dass die unser Erkennen der Natur und ihrer Gesetze ausmachende wissenschaftliche Verknüpfung der Thatsachen, die doch dem Ideal der Widerspruchslosigkeit zustreben soll, eine unüberbrückbare Lücke aufweist. Vor einer solchen Thatsache aber stehen wir, wenn wir in der Natur Körper vorfinden, die nicht bloß in ihrer äußeren Gestalt jene symmetrisch congruenten, nicht in einander überführbaren Formen aufweisen, sondern die auch innerlich in ihrer molecularen Structur, wie sich dies hauptsächlich durch ihr optisches und chemisches Verhalten offenbart, dieselbe grundlegende Verschiedenheit zeigen. Solche Körper liegen vor in den enantiomorphen Krystallen.

Die Enantiomorphie ist nichts anderes als die weiter oben erörterte Unüberführbarkeit symmetrisch congruenter räumlicher Gestalten. Bei Substanzen, die in einem Krystallsystem von mehr oder minder großer Symmetrie krystallisiren, kommt es vor, dass von allen möglichen Flächen einer Form nur die Hälfte oder ein Viertel ausgebildet sind. Man spricht daher von Hemiedrie und Tetartoedrie. Wenn von einem Paare hemiedrischer oder tetartoedrischer Krystalle jedes einzelne keine Symmetrieebene mehr besitzt, obgleich es dem anderen symmetrisch congruent ist, dann sind die beiden Krystalle enantiomorph. In solchem Falle spricht man von enantiomorpher Hemiedrie und Tetartoedrie.

Im regulären System liefert z. B. die plagiedrische Hemiedrie und die aus der Combination von plagiedrischer und dodekaedrischer Hemiedrie hervorgehende Tetartoedrie enantiomorphe Gebilde. Im hexagonalen System ist die trapezoedrische Tetartoedrie, in welcher Quarz, Zinn-

ober und einige unterschwefligsaure Alkalien und alkalische Erdmetalle krystallisiren, enantiomorph. Im tetragonalen System liefert die trapezoedrische und im rhombischen die sphenoidische Hemiedrie enantiomorphe Gestalten. Als Beispiele für die trapezoedrische Hemiedrie in tetragonalem System sei das schwefelsaure Strychnin und das schwefelsaure Aethylendiamin erwähnt, und als solches für die sphenoidische Hemiedrie des rhombischen Systems der Zinkvitriol und die meisten weinsteinsauren Salze[1]).

Der enantiomorphe Charakter eines Krystalls ist häufig nicht aus seiner äußeren Gestalt zu erkennen und zwar nicht bloß deshalb, weil er etwa nur in Bruchstücken oder schlecht ausgebildeten Individuen vorliegt, sondern weil die holoedrische Form äußerlich mehr oder minder vollkommen erhalten ist. Das eben erwähnte schwefelsaure Aethylendiamin z. B. zeigt ganz holoedrisch erscheinende Formen, trotzdem sich die Krystalle bei optischer Untersuchung scharf in rechte und linke scheiden. Bei den Krystallen des Bergkrystalls, Amethystes und Rauchquarzes gibt sich der tetartoedrisch enantiomorphe Charakter oft nur durch leichte Andeutung der Flächen des trigonalen Trapezoeders oder der trigonalen Pyramide zu erkennen; zuweilen aber fehlt auch jedes äußere Anzeichen.

Bei isotropen und optisch einaxigen Krystallen verräth sich die Enantiomorphie bei optischer Untersuchung durch die Circularpolarisation (Rotations-Polarisation). Auch bei optisch zweiaxigen Mineralien, wo der Nachweis der Circularpolarisation ausgeschlossen ist, documentirt sich der enantiomorphe Charakter häufig dadurch, dass die Substanzen in Lösungen die Polarisationsebene drehen. Während Rohrzucker, Campher und Weinsäure nur in Lösungen, Kieselsäure (Quarz) nur in krystallisirtem Zustande die Eigenschaft der Circularpolarisation erkennen lassen, zeigen andere Substanzen, wie z. B. das schwefelsaure Strychnin das Drehungsvermögen sowohl im festen wie im gelösten Zustande. Terpentinöl (das aus Pinus abies und Pinus picea gewonnene ist linksdrehend, das aus anderen Pinus-Arten [Pinus silvestris, Pinus austriaca und Pinus strobus] erhaltene ist rechtsdrehend) besitzt das Drehungsvermögen, wie Biot zuerst nachwies, sogar in allen drei Aggregatzuständen.

---

1) Vgl. Groth, Physikalische Krystallographie, sowie Liebisch, Geometrische Krystallographie, 1888, und Liebisch, Physikalische Krystallographie, 1891.

Ein rechtsdrehender Krystall bleibt unter allen Umständen rechtsdrehend, man mag einen Schliff, von welcher Richtung man will, anwenden, und in einer drehenden Flüssigkeit lässt sich, ohne Anwendung chemischer Veränderung, das Drehungsvermögen weder aufheben noch umkehren. Es ist bekannt, dass durch Anwendung von Druck- und Temperaturänderung nicht nur die Gestalt (Kantenwinkel), die Elasticität und die elektrischen Eigenschaften der Krystalle, sondern auch ihre optische Beschaffenheit geändert wird. Die Richtung des Drehungsvermögens wird durch diese Agentien nicht geändert. Durch Druck können amorphe und einfach brechende krystallinische Substanzen doppelbrechend werden. Comprimirter Quarz verändert durch den Druck den Grad seiner Doppelbrechung und wird sogar optisch zweiaxig; aber seine Circularpolarisation ändert er nicht. Durch starke Temperaturerhöhung wird zwar, wie dies ja bei der gleichzeitigen Gestalts- und Elasticitätsänderung kaum anders zu erwarten ist, das Drehungsvermögen in geringfügigem Grade verstärkt oder vermindert. Aber die Richtung desselben wird nicht umgekehrt, und aufgehoben wird das Drehungsvermögen höchstens, wenn der Körper in einen anderen Aggregatzustand übergeht.

Die beiden Modificationen derselben Substanz, die rechtsdrehende und die linksdrehende, auch wenn sie aus derselben gemeinsamen, kein Drehungsvermögen besitzenden Lösung herauskrystallisirten, zeigen in ihrem chemischen Verhalten oft erhebliche Abweichungen; und die Mischung beider ist zuweilen im Stande, andere Verbindungen einzugehen als jede von ihnen einzeln, obgleich die quantitative Analyse auch nicht den geringsten Unterschied nachzuweisen vermag. Wäre die Verschiedenheit der enantiomorphen Krystalle nur eine rein äußerliche, die Gestalt betreffende, so wäre der Erscheinung keine besondere Wichtigkeit beizumessen. Die Thatsache der Circularpolarisation und die Abweichung im chemischen Verhalten aber zeigt, dass bei diesen Substanzen der ganze innere Bau für das rechte und linke Individuum, für die rechtsdrehende und linksdrehende Lösung, von Grund aus verschieden sein muss. Man nimmt allgemein an, dass auch in festen und flüssigen Körpern die kleinsten Theilchen in fortwährender oscillatorischer Bewegung irgend einer Art begriffen sind. Bei enantiomorphen Substanzen muss nun diese Molecularbewegung in rechts- und linksdrehenden Individuen ebenso verschieden sein wie ihre äußere

Gestalt. Ob es wirklich die chemischen Moleküle und Atome oder die nach den neueren Theorien anzunehmenden viel kleineren Theilchen der Moleküle und Atome sind, die die Bewegungen ausführen, das bleibt sich schließlich gleich. Die Bewegungen in der rechtsdrehenden Substanz sind symmetrisch congruent, enantiomorph, zu denen der linksdrehenden und beide können nicht in einander übergeführt werden.

Das Vorkommen dieser enantiomorphen Elementarbewegungen ist keineswegs von beschränkter Verbreitung. Der Quarz ist sicher eins der verbreitetsten gesteinbildenden Mineralien, wenn nicht gar das häufigste, und ist mit verschwindenden Ausnahmen immer hexagonal-tetartoedrisch-enantiomorph. In der organischen Natur zeigen viele Verbindungen das Drehungsvermögen, so z. B. fast alle ätherischen Oele, deren es eine so große Mannigfaltigkeit gibt. Von einigen drehenden Substanzen haben wir nur eine der beiden Varietäten, wie beim Citronenöl, beim Rohr- und Traubenzucker, die stets rechtsdrehend, und beim Nicotin, Chinin und Amygdalin, die immer linksdrehend sind. Vielleicht geht die Bedeutung der Enantiomorphie weit über das jetzt Bekannte hinaus; sie mag vielfach existiren, wo uns die Mittel fehlen, sie nachzuweisen. Wir haben uns aus ästhetischen und didactischen Gründen gewöhnt, überall die geometrisch einfachsten, die regulärsten und symmetrischsten Krystalle voranzusetzen. Aber sie sind in der Natur nicht nothwendig das Primäre, das Einfachste. Gewisse Erscheinungen sprechen in der That für die Annahme, dass als das Elementarste in der Krystallwelt die asymmetrischen Formen aufzufassen sind. (Eine im Trachyt, Diabas und Andesit, ganz selten auch in porphyrischem Gestein vorkommende Quarzart, der Tridymit, ist nur bei einer Temperatur von über 300 Grad wirklich hexagonal, sonst triklin.) Von dem monoklinen System aufwärts haben wir überhaupt mit der Möglichkeit zu rechnen, dass die Holoeder auch da, wo wir überhaupt nichts davon bemerken und nachweisen können, Combinationen von minder symmetrischen Formen und schließlich von sich gegenseitig neutralisirenden enantiomorphen Antagonisten sind. Wir ständen dann vor einer Welt von Gegensätzen nicht des Lichtes und der Finsterniss, der Attraction und Repulsion, des Positiven und Negativen, sondern des Rechts und Links. Wie dem auch sei, so viel ist gewiss: Es gibt in der Natur Körper, Substanzen, die bei aller sonstigen Uebereinstimmung

doch die grundlegende Verschiedenheit aufweisen, dass die in ihnen vor sich gehenden Bewegungen der Elementartheilchen jenen nicht definirbaren Charakter des Rechten und Linken besitzen, und somit die Bewegungen der einen Art nicht in die der anderen Art übergeführt werden können.

Aus der Annahme dieser Thatsache ergeben sich aber für unsere gegenwärtige naturwissenschaftliche Weltanschauung recht bedenkliche Consequenzen. Nach dem Gesetz der Erhaltung der Quantität der Bewegung sind alle Vorgänge in der Natur (wobei natürlich von Bewusstseins-Vorgängen abgesehen werden muss) Bewegungen im Raum. Nun soll aber jede Bewegung die Wirkung von vorausgehenden und die Ursache von folgenden Bewegungen sein. Wir haben es also nirgends mit der freien Entstehung oder der unabhängigen Existenz von Bewegungen, sondern überall mit der Transformation von Bewegung zu thun. Wenn für unsere Wahrnehmung Bewegungen aufhören, so ist das nur scheinbar; in Wirklichkeit werden sie in uns direct unerkennbare Molecularbewegungen umgesetzt. Diese Umformungen müssen eine endlose Kette causal verbundener Bewegungsvorgänge darstellen. Jeder Naturvorgang muss ein Glied dieser Kette sein. Jede unabhängige Bewegung, die also nicht ursächlich mit den vorangehenden und folgenden verkettet wäre, müsste als ein Wunder, als eine Durchbrechung des Gesetzes betrachtet werden.

Nun aber erhebt sich die Frage: Können enantiomorphe Bewegungen in ursächlichem Zusammenhang stehen? Bezüglich der Raumerfüllung sind zwei Fälle möglich: entweder füllt das sich Bewegende den Raum völlig aus, oder es thut dies nicht. Nun ist aber leicht ersichtlich, dass in einem materiellen Continuum enantiomorphe Bewegungen überhaupt nicht möglich sind. Nehmen wir beispielsweise an, dass ein Theil des allen Raum erfüllenden »Stoffes« in einer nicht in einer Ebene vor sich gehenden rechtsdrehenden Spiralbewegung begriffen sei, so ist klar, dass nur solche Theile, die in einer Drehung im selben Sinne, also in einer in die erstere überführbaren Bewegung begriffen sind, in den durch die erstere Bewegung geschaffenen leeren Raum ausfüllend nachrücken können. Findet daher irgendwo im Continuum eine Spiralbewegung in zu der erstgenannten enantiomorphem Sinne statt, so muss irgendwo eine Lücke, ein leerer Raum entstehen, und damit wäre das Continuum durch-

brochen. Soll das Bewegte den Raum vollständig ausfüllen, so sind demnach enantiomorphe Bewegungen überhaupt nicht möglich, ohne ein Loch in das Continuum zu reißen.

Aber auch bei nicht völlig ausgefülltem Raum, bei Annahme irgend einer atomistisch-kinetischen oder dynamischen Theorie führt die Enantiomorphie zu Widersprüchen, sobald man sich nicht darauf beschränkt, die Thatsache jener Bewegungen anzuerkennen, sondern sie auch in den allgemeinen causalen Zusammenhang einreihen will Auch bei der Annahme einer den Raum nicht erfüllenden Materie verlangt das Gesetz der Aequivalenz, dass zwischen Ursache und Wirkung Gleichartigkeit besteht. Das heißt, der Causalnexus erstreckt sich nur auf die Quantitäten solcher Eigenschaften von Ursache und Wirkung, die etwas Gemeinsames, Commensurabeles haben. Was qualitativ verschieden ist, kann in keine Causalverbindung eintreten. Darum steht ja alles Psychische außerhalb der mechanischen Causalreihe, und darum können wir die Sinnesqualitäten nicht aus den Eigenschaften der physischen Reize erschließen oder berechnen. Auch Bewegungen, welche im Causalzusammenhang stehen, müssen qualitativ gleichartig und daher direct oder indirect in einander überführbar sein. Eine einzige große Ortsveränderung kann die Ursache einer großen Summe von kleinen mit den Sinnen vielleicht nicht mehr wahrzunehmenden Molecularbewegungen sein, und umgekehrt, aber es muss zwischen diesen und jenen qualitative Gleichartigkeit herrschen. Tritt in der Wirkung eine neue mit der Ursache incommensurable oder unvergleichbare Erscheinung auf, so ist die Ursache eben unfähig, diesen neuen Effect zu erklären. Zwischen Bewegungen irgend welcher Art, so lange sie unter Anwendung des Princips der Relativität der Größe durch Auftheilung und Verschiebung in einander übergeführt werden können, besteht ein solches Verhältniss der Unvergleichbarkeit nicht. Sobald aber die Bewegungen enantiomorph sind, liegt bei aller Gleichheit der Größen- und Raum-Verhältnisse eine solche endgültige und nicht zu überbrückende Ungleichheit vor; denn das Rechts und Links ist ein rein qualitativer, ursprünglicher und unzerlegbarer Unterschied, der sich weder beschreiben noch definiren lässt. Es folgt demnach, dass zwischen enantiomorphen Bewegungen eine einfache causale Verknüpfung nicht bestehen kann. Eine Bewegung kann nicht die Ursache einer zu

ihr enantiomorphen Bewegung sein. Sie mag Mitbedingung und ihr quantitativ äquivalent sein; aber sie kann nicht die Ursache jener veränderten Raumqualität sein.

Es ist ebenso unmöglich anzunehmen, dass zwei enantiomorphe Bewegungen derselben Ursache entsprängen. Man könnte sagen: Die beiden Fälle, die rechte und die linke Modification haben gleiche Chancen, und es ist der reine Zufall, ob der eine oder der andere Fall eintritt. Damit aber hätten wir zwei in der modernen Mechanik unzulässige Begriffe eingeführt, nämlich den des Zufalls und den der Ursache, die verschiedene Wirkungen hervorbringen kann. Wollen wir dies vermeiden, so müssen wir neben der Hauptursache noch für jede der beiden Modificationen eine Specialbedingung annehmen, und diese Specialursachen müssen dann nach dem oben Erörterten selbst enantiomorph sein. Und dann haben wir das Problem nur ein Stockwerk höher hinaufgetragen. Wir sehen also: Enantiomorphe Bewegungen können, soweit es ihre nicht in einander überführbaren Eigenschaften anbelangt, weder in dem Verhältniss von Ursache und Wirkung zu einander stehen, noch lassen sie sich aus einer gemeinsamen Ursache herleiten.

Mit dieser Erkenntniss aber ist der Grund, auf welchem unsere moderne Naturanschauung aufgebaut ist, nämlich das Gesetz von dem einheitlichen Zusammenhang aller Naturvorgänge (uniformity of nature) stark erschüttert. Fehlt zwischen enantiomorphen Vorgängen der causale Zusammenhang, so haben wir nicht länger eine einheitliche und eindeutige Verknüpfung aller Bewegungsthatsachen, sondern die enantiomorphen Erscheinungen stehen sich, trotz ihrer sonstigen Gleichheit, wie zwei Welten gegenüber, die sich durchkreuzen, aber von einander unabhängig sind. Da die rechtsdrehenden Bewegungen nicht von linksdrehenden verursacht sein können, und umgekehrt, so müssen wir entweder annehmen, dass beide von Uranfang an neben einander bestehen, oder aber dass die Verschiedenheit das Resultat eines auf der Basis der Naturcausalität nicht zu erklärenden, jeweiligen Eingriffs unbekannter Gewalten ist. Im ersteren Falle könnte man sich die Materie aus zwei antagonistischen Systemen Helmholtz-scher oder Lord Kelvin'scher Wirbelatome zusammengesetzt denken, das eine aus rechten, das andere aus linken bestehend. In Substanzen ohne Drehungsvermögen sind sie im Gleichgewicht. In den drehen-

den Substanzen ist die eine Art ausschließlich vorhanden oder vorherrschend. Zieht man die zweite Version vor, so lässt man den Causalzusammenhang durch mystische Gewalten durchbrechen, und es ändert gar nichts an der Sachlage, wenn man diese Gewalten gleich den enantiomorpher Bewegungen fähigen Atomen zuschreibt und diese so zu einer Art Dämonen macht. Das ist nicht mehr absurd als die neueste Modification der Wirbeltheorie, wonach die Wirbelatome die Fähigkeit besitzen, um sich herum eine materielle Atmosphäre zu »schaffen« oder eine solche zu »vernichten« (die Theorie der »Sources and Sinks«). Nur meine ich, wäre es in diesem Falle viel einfacher und ungezwungener, die Schöpferkraft in einer Hand zu lassen und an den guten alten »lieben Gott« zu appelliren, anstatt Myriaden von Dämönchen oder mikroskopischen Götterchen anzunehmen[1].

Es bleibt noch ein Einwand zu entkräften. Man könnte sagen: Die Enantiomorphie braucht eben so wenig causal-mechanisch erklärt zu werden wie die Qualität Roth oder das Gefühl der Unlust oder irgend eine andere psychische Thatsache. Dies ist aber ein Irrthum. Die psychischen Qualitäten stehen ganz außerhalb der mechanischen Causalreihe; sie sind vom mechanischen Standpunkte aus eine reine Gratisbeigabe der physischen Processe. Ob ich die Wellenlänge 560 $\mu\mu$ als Roth, als Gelb oder als farblos wahrnehme, das ändert an den Betrachtungen der physikalischen Optik absolut nichts. Die Enantiomorphie dagegen steht selbst mitten in der Reihe des mechanischen Geschehens. Sie ist eine Bewegungsthatsache. Die Unüberführbarkeit der enantiomorphen Bewegungen ist nicht weniger physisch und nicht mehr psychisch als die Bewegung überhaupt.

Es gibt aber noch einen bequemen Ausweg aus allen diesen Schwierigkeiten, ein Mittel, die einheitliche Causalität der Natur zu retten. Man braucht ja nur anzunehmen, dass die Natur in »Wirklichkeit« vier- oder mehrdimensional sei, dass uns in unserer Beschränktheit aber nur drei Dimensionen »gegeben« seien, und dass es in der vierdimensionalen Welt noch viele Dinge und Verhältnisse

---

1) Ich bin in der That überzeugt, dass sich in jedem Naturvorgang (auch ganz abgesehen von der Enantiomorphie) ein Element nachweisen lässt, das nicht causal bedingt und abhängig ist, sondern das sich nur aus dem Walten einer außerhalb aller Causalität stehenden »Freiheit« erklären lässt.

gebe, von denen sich unsere dreidimensionale Schulweisheit nichts träumen lässt. Die enantiomorphen Gestalten und Bewegungen sind dann zwar in unserer beschränkten dreidimensionalen Erscheinungswelt, über die wir nicht hinaus können, nicht in einander überführbar, wohl aber sind sie es in der uns verschlossenen vierdimensionalen »Wirklichkeit«. In der vierten Dimension brauchen wir eine asymmetrische räumliche Figur oder Bewegung nur herumzuwenden, umzuklappen, wie wir in der dritten eine ebene asymmetrische Figur oder Bewegung herumdrehen, und man hat die entgegengesetzte, zu ihr enantiomorphe.

Lotze[1]) war der Ansicht, dass die fingirten, nur einer flächenhaften (sei es eine Ebene oder sphärische Fläche) Raumanschauung fähigen Wesen dennoch aus den ihnen in ihrem Raume begegnenden Widersprüchen auf eine weitere Dimension schließen müssten, während für uns jede Veranlassung zu einem ähnlichen Schlusse fehle, da für uns keine solchen Widersprüche und anderswie unerklärlichen Erscheinungen existiren. Diesen Einwand würde Lotze angesichts der enantiomorphischen Erscheinungen nicht aufrecht erhalten können.

In der That, wenn die Theorie der vierten Dimension auf irgend einem Gebiete eine Existenzberechtigung haben und Beachtung verdienen sollte, so wäre es bei diesem naturwissenschaftlichen Problem der Enantiomorphie. Hier stehen wir in der That vor der Alternative, entweder zum Wunder oder zur vierten Dimension unsere Zuflucht nehmen zu müssen, sofern wir nicht den Grundgedanken der heutigen Naturwissenschaft, die einheitliche causale Ordnung preisgeben wollen. Und dennoch, glaube ich, ist, vom strengsten wissenschaftlichen Standpunkte betrachtet, die Annahme des Wunderbaren, Unerklärten und Unerklärlichen derjenigen einer vierten Dimension noch vorzuziehen. Die Gründe hierfür werden sich aus dem weiteren Verlaufe unserer Betrachtungen von selbst ergeben.

IV. Der mathematische Gesichtspunkt.

Das kühne Gebäude der Metageometrie besitzt trotz seines verhältnissmäßig geringen Alters eine so vielseitige, verwickelte Construction, dass es schwer wird, sich ein Gesammtbild, eine Ge-

---

1) Metaphysik, S. 255.

sammtvorstellung davon zu verschaffen. Es fehlt die einheitliche Architektur. Es haben so viele und nach so verschiedenen Plänen daran gebaut, und für den Außenstehenden erscheint das Ganze zunächst wie ein rasch emporgeschossener Ausstellungspalast, in welchem es zwar zahlreiche Räume für solide Landesprodukte, aber daneben auch Abtheilungen für Seiltänzer und Zauberkünstler gibt und welchem vor allem eins fehlt, das für jedes auf die Dauer berechnete Gebäude wesentlich ist, nämlich ein festes und sicheres Fundament. Mancher Mathematiker von Fach wird mir, als einem solchen Außenstehenden, erwidern: »Das Fundament ist vorhanden und gesichert, aber es ist nur eine verhältnissmäßig geringe Anzahl von Einsichtigen da, die es verstehen und prüfen können. Es gehört ein besonderes Verständniss dazu, wie für die Mathematik überhaupt, so für diese Seite derselben. Dieses Verständniss, welches man nur erwirbt, wenn man sich lange genug mit der Sache beschäftigt hat, besitzen diejenigen nicht, die die Metageometrie bekämpfen.« Wenn man darauf einwendet, dass auch Leute, die selbst eingeweiht waren »in alle Weisheit der Aegypter« und deren Forschungen man als Ecksteine der neuen Theorien benutzt, — beispielsweise kein geringerer als Cayley — die Pan- und Metageometrie verdammt haben, dann erhält man einfach zur Antwort, dass diese Forscher sich unstreitig geirrt haben.

Hier nun erheben sich zwei bedeutsame Fragen, nämlich: »Hat die Mathematik eine besondere Grundlage, ein von dem der übrigen Wissenschaften getrenntes Fundament?« und »Wie kommt es, dass die Mathematik, die doch die allgemeinsten und zweifellosesten Gesetze des Denkens, Seins und Geschehens, deren praktisch-universale Gültigkeit auch der extremste Empirist nicht zu leugnen wagt, zum Gegenstand hat, nach der Ansicht vieler Fachleute unserer Tage eine ganz besondere geistige Veranlagung bei dem sich ihrem Studium Widmenden voraussetzt?«

Die erste Frage dürfte entschieden zu verneinen sein. Es sind im Grunde genommen dieselben in der Erfahrung gegebenen Thatsachen und Nothwendigkeiten, die die Grundlage, den Ausgangspunkt aller Wissenschaften, ausmachen. Nicht der Gegenstand, sondern der Standpunkt der Betrachtungsweise bedingt ihre Verschiedenheit. Soweit sie auch auseinandergehen mögen; wo es sich um die letzten,

das heißt einfachsten und unzerlegbaren Elemente handelt, von denen alle Erkenntniss ausgeht, da kommen sie alle zusammen. Die Untersuchung der Fundamente darf daher auch nicht das Privileg einer Einzelwissenschaft bilden; sie ist eine nothwendige Vorarbeit aller, und man darf Niemandem sagen, er habe kein Recht, die Fundamente zu prüfen, wenn er nicht zuvor den ganzen Oberbau studirt habe. Im Gegentheil, die Prüfung der Fundamente sollte sich jeder angelegen sein lassen, der seine Erkenntniss nicht in letzter Instanz auf die Autorität Anderer basirt sehen will. Es gibt leider gar zu Viele, besonders in der Mathematik und Philosophie, die sich mit Vorliebe in den oberen Stockwerken, in verschnörkelten Thürmchen und kunstreichen Erkern aufhalten, theils schaffend und ausbessernd, theils zum Vergnügen, und die gar nicht daran denken, die Fundamente einer kritischen Untersuchung zu unterziehen.

Ueberdies ist die Abgrenzung der Einzelwissenschaften eine sehr unsichere und willkürliche. Sie soll dem öconomischen Princip der qualitativen Arbeitstheilung und nicht dem Bestreben dienen, unübersteigliche Zäune zum Zwecke der Verhinderung der Uebergriffe aus einem Gebiete in das andere zu errichten. Leider ist heute bereits diese künstliche Trennung schon zu einem solchen Grade gediehen, dass man in manchen Disciplinen gar kein Verständniss mehr hat für die Berechtigung der Probleme anderer Disciplinen. Die Grundprobleme der Mathematik sind eben so wohl Grundprobleme der Psychologie, der Logik und Erkenntnisstheorie und der Physik, und je mehr man sich eben diesen Fundamentalproblemen nähert, um so mehr wird die strenge Scheidung der Disciplinen, wenn anders sie sich nicht lediglich auf die Form, die Ausdrucksweise beziehen soll, eine Sache der Convention und des persönlichen Beliebens. Man darf nicht vergessen, ein Satz ist nur dann richtig und unantastbar, wenn er immer und überall gilt, einerlei welchen Namen das Gebiet führt, in welchem man ihn gerade anwenden will.

Hinsichtlich der zweiten Frage, die die allgemein anerkannte Unpopularität der Mathematik angeht, meine ich, muss man, sofern man nicht eine eigenthümliche allgemeine Degeneration der Menschheit annehmen will, vermöge deren es ihr, trotz zunehmender Denkkraft und Beobachtungsgabe, immer schwieriger werde, die Gesetze des eigenen Denkens und Anschauens zu erfassen, den Schluss ziehen,

dass an der Erscheinung nicht sowohl der Gegenstand der Mathematik als die in unseren Tagen übliche Methode und Darstellungsweise dieser Wissenschaft die Schuld trage.

Es ist nicht so sehr der Mangel an Verstand, an Denkvermögen, der es dem gebildeten Durchschnittsmenschen unserer Tage so schwer werden lässt, in die Mysterien der höheren Mathematik einzudringen, als vielmehr der Mangel an Bereitwilligkeit oder auch Fähigkeit, sich einer inadäquaten Ausdrucksweise, einem willkürlichen, verschrobenen Symbolsystem anzupassen und zu unterwerfen; nicht der Mangel an Abstractionsgabe überhaupt, sondern die mangelnde Fähigkeit *so* zu abstrahiren, wie ein Anderer, der seine Ideen in willkürlichen Symbolen und mit möglichst wenig Commentar vorträgt oder niederschreibt, es sich gerade denkt. Es gibt überhaupt keinen Gedanken, der zu hoch oder zu tief wäre, als dass ihn der Mensch mit normaler Denkkraft zu fassen vermöchte. Wird eine Idee nicht erfasst, so liegt das meist an der inadäquaten Darstellungsweise, an ungerechtfertigten Anforderungen, die man an das Gedächtniss stellt, besonders das, was man als Simultan-Gedächtniss bezeichnen könnte, d. i. die Fähigkeit eine Menge mehr oder minder willkürlicher Symbole und Bestimmungen gleichzeitig zu verwenden ohne die Bedeutung derselben zu verwirren. Die heutige Mathematik ist in viel höherem Maße, als man gewöhnlich denkt, Gedächtnisssache und in viel geringerem Maße Verstandessache.

Worin aber besteht nun die gerügte inadäquate Ausdrucksweise in der Mathematik? Da ist zunächst der von den Mathematikern anscheinend für selbstverständlieh angesehene Gebrauch, alles in die Form von Gleichungen zu pressen, obgleich wir in der Welt der gegebenen Wirklichkeit nirgends Identitäten, vollkommenen Gleichheiten begegnen. Die in wirklichen und möglichen Erlebnissen anzutreffenden Beziehungen, denen die zur mathematischen Betrachtung erforderte Nothwendigkeit innewohnt, sind die *partielle Uebereinstimmung* (z. B. nach Größe, Gestalt, Collineation, Lage u. s. w.) und die *Abhängigkeit*. Drücken wir alle diese Beziehungen in Form von Gleichungen aus, so müssen diese letzteren entweder oft Unwahrheiten enthalten, oder wir müssen übereinkommen, aus den Gleichungen herauszulesen, was gar nicht darin steht. In dieser Hinsicht befindet sich die Mathematik noch gar zu sehr auf dem einseitigen Standpunkte der Identitäts- und Subsumtions-Logik.

Da ist des weiteren die Annahme von Begriffen, die, weil mit inneren Widersprüchen behaftet, anfangs nur als später wieder zu eliminirende Hülfsbegriffe eingeführt werden, die sich aber durch den häufigen Gebrauch so einbürgern, dass sie zuletzt für mathematische Entitäten gelten. Hierher gehören die weiter oben schon erwähnten »benachbarten Punkte«, das »Linienelement«, das keine Ausdehnung haben, aber doch eine Richtung repräsentiren soll, das Krümmungsmaß von mehr als zweidimensionalen Raumgebilden u. a. m. Solche Hülfsbegriffe erweisen sich oft als sehr nützlich, so lange man bei ihrer Verwendung eingedenk bleibt, dass sie zwar abgekürzte, aber unrichtige Ausdrücke für sehr complicirte Verhältnisse sind, deren jeweilige getreue Darstellung einen großen Aufwand von Zeit und Mühe erfordern würde. Sie dürfen daher auch nicht schon als Elemente in den Voraussetzungen figuriren, von welchen man ausgeht. Und ebenso müssen sie aus den Endresultaten, wenn anders denselben eine Bedeutung zukommen soll, wieder verschwunden sein. In einer Regeldetri-Aufgabe mögen wir wohl ganz correcter Weise rechnen: Der Vorrath Heu, der 1 Woche ausreicht für 7 Pferde, reicht 5 Wochen für $\frac{7}{5}$ Pferde u. s. w. Aber wir dürfen keine Rechnung mit einem Satze beginnen oder schließen, der diese $\frac{7}{5}$ Pferde enthält. Das ist es auch, was Whitehead meint, wenn er das Symbol $(-1)^{\frac{1}{2}}$ für absolut sinnlos erklärt, wenn man es als Zahl ansehe[1]).

Auch die negativen Zahlen gehören hierher, sobald man bei ihrer Verwendung vergisst, dass sie nur eine relative Bedeutung haben. Es gibt nichts Negatives in der Welt der Wirklichkeit. Wo wir die Begriffe Positiv und Negativ auf Paare conträrer Qualitäten anwenden, wie bei der Elektricität, der Enantiomorphie, der Photographie u. s. w., da ist diese Anwendung eine rein conventionelle und willkürliche. Die Begriffe könnten eben so gut umgekehrt gebraucht oder durch andere wie rechts und links, Nord und Süd oder dergl. ersetzt werden. Auch wo sie auf Quantitatives angewandt werden, wie etwa auf Richtungen im Raume, oder bei der Messung der Temperatur, könnten sie nicht allein eben so gut vertauscht werden, sondern es ist hier stets auch der Nullpunkt, der Trennungspunkt der als Antagonisten gesetzten Größen vollständig willkürlich und conventionell. Die Null

1) Whitehead, Treatise on Universal Algebra, p. 11.

ist das Zeichen nicht für die Negation aller Eigenschaften, aller Größen, sondern nur für das jeweilige Nichtvorhandensein gewisser, unter gleichzeitigem Vorhandensein anderer Größen und Qualitäten. Das absolute Nichts ist ein viel transcendenterer »Begriff« als das Unendliche. Man hat sich aber gewöhnt, für diesen qualitativ variabeln und quantitativ (als willkürlich gesetzter Anfangspunkt für die Zählung) nur relative Bedeutung besitzenden Ausdruck stets dasselbe Zeichen zu setzen, wodurch man dann verleitet wird, die Null als Zahl, als Größe zu betrachten und mit ihr wie mit anderen Zahlen arithmetische Operationen auszuführen.

Wir haben gesehen, dass die Unterscheidung des Positiven und Negativen entweder eine willkürliche Bezeichnung qualitativer Gegensätze ist oder aber aus der eben so willkürlichen Setzung eines Anfangspunktes für die Zählung und Größenmessung hervorgeht. Es gibt keine wirklichen oder denkbaren Systeme von Quantitäten, in welchen negative Größen ohne willkürliche Festlegung des Nullpunktes einen Sinn haben. Das abstracte Symbol $-a$ bedeutet zunächst nicht eine Größe, sondern, wie jeder mit einem Vorzeichen behaftete Ausdruck, eine Aufgabe, und zwar eine solche, die nicht nothwendiger Weise immer lösbar sein muss. Da man in jeder quantitativen Reihe, unbeschadet der gegenseitigen Verhältnisse der Glieder unter einander, den Nullpunkt beliebig verschieben kann, so kann das, was von einem Gesichtspunkte aus positiv ist, von einem andern als negativ betrachtet werden. Der Unterschied zwischen $+1$ und -1 ist daher nur ein Richtungsunterschied. Dies wirft ein eigenartiges Licht auf die sogenannten imaginären[1]) oder complexen Größen, die, wie die negativen Zahlen, recht nützliche Hülfsbegriffe abgeben, so lange man sie im Laufe der Rechnung wieder zu eliminiren weiß. $\sqrt{-1}$ ist in erster Linie eine Aufgabe, und nicht mehr und nicht minder imaginär als $\sqrt{+1}$.

Das Operiren mit ungenügend bestimmten und Pseudobegriffen hat in letzter Instanz seinen Grund in der geringen Bereitwilligkeit

1) Diese Bezeichnung ist eine ebenso unglückliche, wie die der nicht in endlicher Form darstellbaren Zahlen als irrationale. An den letzteren ist durchaus nichts vernunftwidriges zu entdecken, und die ersteren scheinen ihren Namen — lucus a non lucendo — bekommen zu haben, weil man sich bei ihnen absolut nichts mehr vorstellen kann.

der heutigen Mathematik, eine wirkliche Analyse der Begriffe auszuführen. Was man in der Mathematik Analyse nennt, ist, soweit es sich auf den Raum bezieht, nur ein Zurückführen bis auf ein gewisses, der arithmetischen Behandlung bequemes Stadium, wie bei den rechtwinkligen und Polar-Coordinaten, nicht aber ein Zurückführen auf absolut einfache, nicht weiter zerlegbare Elemente. So ist der Punkt nur vom Standpunkte der Größenbetrachtung einfach und unzerlegbar, nicht aber von demjenigen der Ausdehnung (d. i. des Raumes).

Man streitet sich darum, ob die als Axiome ausgegebenen Sätze apriorischer oder empirischer Natur sind — und dabei sind »apriorisch« und »empirisch« selbst ziemlich fragwürdige Begriffe — anstatt, wie es z. B. die Chemie mit so großem Erfolge gethan und wie es die Psychologie zu thun begonnen, zu ermitteln, ob sie etwas absolut Einfaches oder ein Zerlegbares ausdrücken. Ist aber ein mathematischer Satz oder Gedanke als absolut einfach befunden worden, so kann er nicht bewiesen werden, und wenn von zwei Menschen der eine ihn für nothwendig, der andere aber für falsch erklärt, so spricht einer von ihnen, falls wir annehmen, dass das Denken beider commensurabel ist, die — Unwahrheit (die subjective, denn eine andere gibt es nicht).

Die Anwälte der nicht-euklidischen Geometrie sind meist geneigt den Gegnern vorzuwerfen, dass sie zu sehr an den einmal gewählten technischen Ausdrücken Anstoß nehmen, und dass die Abneigung gegen die neue Lehre zum großen Theil auf mathematischer Unkenntniss — das hat man sogar die Stirn gehabt, dem scharfsinnigen Lotze vorzuhalten[1]), — hauptsächlich auf Unverständniss für die wahre Bedeutung der für die nicht-euklidische Geometrie eingeführten Bezeichnungen beruhe, ähnlich etwa wie es dem Laien mit der langathmigen Terminologie der modernen organischen Chemie ergeht. Hier aber liegt die Sache ganz anders. Auch die einen Zeilen langen Namen erheischende complicirte Kohlenstoffverbindung kann eindeutig als explicite Function von Radicalen und Elementen definirt werden, und die chemische Terminologie ist trotz ihrer für den Uneingeweihten abschreckenden Form ganz consequent. Nicht so diejenige der

---

1) Russel, Foundations of Geometry, p. 98.

Metageometrie. Da werden fortwährend Begriffe gebraucht, die der euklidischen Geometrie entnommen sind. Es werden ihnen dann Eigenschaften beigelegt, die sie beim euklidischen Gebrauch ohne Widerspruch nicht haben können. Man sagt dann, in der nicht-euklidischen Geometrie seien die Widersprüche nicht vorhanden. Das sagt man, und wenn es bewiesen werden soll, dann wartet man wieder mit schlecht passenden Analogien und zugestandenermaßen unrichtigen Illustrationen aus der euklidischen Raumlehre auf.

Da ist endlich die einseitige analytische Behandlungsweise. Man könnte fast von einer analytischen Manie reden. Die geschriebene Formel gilt alles, die Anschauung, auch da, wo es sich um räumliche Verhältnisse handelt, gar nichts. Figuren sind nahezu verpönt, besonders wenn sie etwas complicirterer Art sind und die klare Raumbeobachtung des exacten Zeichners voraussetzen. Man kann fertige Mathematiker, mit der fac. doc. in der Tasche, treffen, die Kegelschnitte »durchaus studirt« haben und die analytischen Formeln darüber nur so aus dem Aermel schütteln können, die aber die Bemerkung, dass alle Parabeln einander ähnlich seien (es handelt sich hier natürlich nur um Curven zweiten Grades) mit Hohnlächeln aufnehmen, die Richtigkeit derselben energisch bestreiten, einen geometrischen Beweis, dem sie Schritt für Schritt zuzustimmen genöthigt sind, einen Trugschluss nennen und sich erst beruhigen, nachdem ein Professor zur Entscheidung zögernd sein Wort zu ihren Ungunsten in die Wagschale geworfen hat. Da kann man sich doch des Gedankens nicht erwehren, dass solche Mathematiker trotz alles Formelwissens die wichtigsten Eigenschaften der Kegelschnitte nicht erfasst haben. Man hat sich an die cartesianische Methode so sehr gewöhnt, dass man sie als etwas ganz Selbstverständliches und Natürliches betrachtet, so wie der Ungebildete das decadische Zahlensystem, das sich der Mensch an seinen fünf Fingern abgesehen hat, obgleich ein duodecadisches ungleich praktischer wäre, für das einzige in der Natur der Sache begründete hält.

Die analytische Geometrie ist ein rein quantitatives Verfahren, dessen Sätze sich ebenso gut auf die eindimensionale sog. reine Größenlehre beziehen könnten. Die Beziehung zum Raum wird nur dadurch hergestellt, dass man die zwei oder drei Variabeln auf je eine constante Grundrichtung beschränkt, wobei man aber, um nicht für

jede Bestimmung acht Punkte statt eines zu erhalten, die willkürlich gewählten Grundrichtungen (Coordinatenaxen) auch noch willkürlich in je einen positiven und negativen Ast theilen muss, denen im Raume nichts entspricht.

Obgleich sich bei der analytischen Geometrie, deren Bedeutung und ungeheurer Nutzen für den Fortschritt der mathematischen Wissenschaften gewiss nicht geleugnet werden soll, die Beziehung zur Anschauung jederzeit herstellen lässt, so wird die thatsächliche Aufrechterhaltung dieser Beziehung im Verlauf der Deduction doch durch den folgenden Umstand sehr erschwert. Bei der wirklich geometrischen Behandlung von Raumgebilden können wir leicht und übersichtlich zwei Momente auseinander halten, die sich in Bezug auf das Gesetz der Relativität ganz verschieden verhalten. Bei jedem Raumgebilde lassen sich die äußeren und inneren Raumbeziehungen unterscheiden und getrennt beurtheilen. Die äußeren Beziehungen d. i. die absolute Größe, Lage etc., sind von andern Raumgebilden abhängig, man ändert sie, wenn man das Princip der Relativität auf das in Frage stehende Raumgebilde allein anwendet. Die inneren Beziehungen, d. i. die Gestalt (Collineation und Winkelverhältnisse) werden durch die Anwendung des Relativitätsprincipes gar nicht berührt. Diese in der anschaulichen Geometrie so leicht auseinander zu haltenden Beurtheilungsweisen, von welchen die eine gerade das betrifft, was in der andern ganz irrelevant ist, nämlich die absoluten Größen, sind in der analytischen Geometrie gar nicht oder nur sehr undeutlich geschieden. Nur auf beschwerlichen Umwegen kann man aus den Gleichungen zweier Curven erkennen, ob die letzteren ähnlich sind oder nicht.

Alle diese Uebelstände in der heutigen mathematischen Methode stehen in engstem Zusammenhange mit den fast allgemein angenommenen Grundvoraussetzungen, dass es eine reine, von der räumlichen Ausdehnung absolut unabhängige Größenlehre gebe, die sich als das Primäre, Ursprüngliche, allen speciellen mathematischen Betrachtungsweisen überordne, und dass die Geometrie des gegebenen Raumes sich als ein besonderer Fall einer allgemeineren Mannigfaltigkeitslehre ansehen lasse. Diese Annahmen liegen aber auch den Speculationen zu Grunde, die zu der Theorie der höheren Dimensionen geführt haben.

In ihrer ersten Entwicklungsstufe, die sich an die Namen Gauß, Lobatschewsky und Bolyai knüpft, ist die Metageometrie nicht um ihrer selbst willen behandelt worden. Es handelte sich vielmehr um die Frage nach der apriorischen Richtigkeit eines von Euklid als Axiom behandelten Satzes: des Gesetzes von den Parallelen. Wenn der Satz von den Parallelen unabhängig ist von den übrigen Axiomen und nicht denselben axiomatischen Charakter hat wie jene, aber eine wesentliche Voraussetzung der euklidischen Geometrie bildet, so sind hinfort zwei Geometrien möglich, eine weitere, umfassendere, in der das Parallelengesetz nicht gilt, und eine engere, die euklidische, die einen durch eine specielle Voraussetzung eingeschränkten Fall der ersteren bildet. Wenn man bei diesem Gedankengang nicht den groben Fehler begeht, zu verlangen, dass eine Reihe von Schlussfolgerungen, weil man sie Geometrie getauft hat, nothwendiger Weise Räumliches repräsentiren müsse, so liegen hinsichtlich des Verhältnisses der genannten Geometrien zum Raume folgende Möglichkeiten vor:

1) Der Satz von den Parallelen ist für den Raum axiomatisch und apriorisch nothwendig; dann ist die euklidische Geometrie die Lehre vom Raume, und die nicht-euklidische, die sich auf irgend etwas anderes beziehen mag, hat mit dem Raume nichts zu thun.

2) Der Satz von den Parallelen ist nicht axiomatisch oder nothwendig, aber auch nicht als unrichtig erwiesen. Das heißt, er mag von gewissen Gesichtspunkten aus als thatsächlich erscheinen. (Nicht zu übersehen ist, dass, wenn ein Satz von allen möglichen Gesichtspunkten betrachtet als thatsächlich erscheint, er eben nothwendig ist). In diesem Falle mögen beide, die euklidische wie die nicht-euklidische Geometrie auf den Raum anwendbar sein, sofern sich dabei keine unlösbaren Widersprüche herausstellen. Sie beziehen sich aber beide dann auf den gegebenen Raum.

3) Der Satz von den Parallelen ist erweislich falsch. In diesem Falle ist die euklidische Geometrie unrichtig und die nicht-euklidische, in der man ohne Parallelengesetz auskommt, ist die Raumlehre, d. i. Geometrie des gegebenen Raumes.

In keinem der aufgeführten drei Fälle liegt eine Nothwendigkeit oder auch nur die geringste Veranlassung vor, »neben« oder »hinter« dem gegebenen noch einen anderen »nicht gegebenen

Raum« anzunehmen. Was speciell den dritten Fall anbelangt, so hat Helmholtz die Denkbarkeit nicht-euklidischer Räume durch die Behauptung darzuthun gesucht, dass vielleicht unser Raum gar nicht einmal wirklich euklidisch sei, sondern nur eine große Annäherung an den euklidischen zeige. Die Fortpflanzungsrichtungen der fernwirkenden Kräfte beispielsweise seien vielleicht gar nicht so gerade, wie wir anzunehmen gewohnt sind.

Er geht so weit, daran zu erinnern, dass die Menschheit so lange auf der vermeintlich ebenen Erde gewohnt habe, ehe sie ihre sphärische Gestalt erkannte, und dass sie sich gegen diese Erkenntniss ebenso hartnäckig sträubte wie die Gegner der nicht-euklidischen Geometrie gegen die Vorstellbarkeit eines sphärischen und pseudosphärischen Raumes. Diese Analogie ist eine höchst mangelhafte, denn die Kugelgestalt der Erde kann jederzeit und gerade mit Hülfe der euklidischen Geometrie anschaulich dargethan, ja direct wahrgenommen werden, während es Helmholtz nie gelungen ist, irgend Jemandem eine Anschauung von den nicht-euklidischen Räumen beizubringen.

Der scharfsinnigen Widerlegung, die Lotze dieser Helmholtzschen Beweisführung angedeihen ließ, ist kaum etwas hinzuzufügen. Es ist eigenthümlich, dass gerade der strenge Empirist Helmholtz so vorgehen konnte, ohne zu merken, dass er consequenter Weise entweder seine nicht-euklidischen Räume oder seinen Empirismus hätte aufgeben müssen. Denn nehme man einmal an, Helmholtz habe Recht, der Raum der Wirklichkeit sei nicht gerade, sondern mehr oder minder krumm. Dann sind zwei Fälle möglich: entweder merken wir diese Krümmung oder wir merken sie nicht. Im Falle dass sich die Krümmung weder direct noch indirect (etwa vermittelst feiner Messinstrumente) wahrnehmen und nachweisen ließe, bestände aber zwischen unserem geraden Raume und dem Helmholtz'schen krummen gar kein Unterschied. Es hätte dann überhaupt keinen Sinn von geraden und krummen Räumen zu reden. Es wären ja doch nur verschiedene Ausdrücke für dasselbe Ding. Bemerkten wir aber die Krümmung, so könnte dies doch nur durch den Vergleich mit dem nichtgekrümmten geraden Raume geschehen. In diesem Falle würden wir also den empirischen, gekrümmten Raum an einem nichtempirischen, euklidischen Raume

messen, womit die Priorität und Apriorität des letzteren zugegeben wäre. Der gerade euklidische Raum und seine Ausmessung bleibt also in jedem Falle die »maß«gebende Norm, oder wie J. Schultz sich treffend ausdrückt[1]: In allem Wirrwarr der Helmholtz'schen Hexenküche bleibt nur eins stehen: Unsere Geometrie.

Nach Legendre lässt sich beweisen, dass die Winkelsumme im Dreieck kleiner sein kann als zwei Rechte. Wenn man dies einmal zugibt, dann folgt zugleich, dass die Winkelsumme mit der Größe des Dreiecks abnimmt. Wie gefährlich diese Annahme dadurch für die Folgerichtigkeit aller Geometrie werden muss, dass sie die Möglichkeit einer unendlichen Menge von verschiedenen aber gleichzeitig richtigen Systemen proclamirt, hat schon Taurinus[2]) eingesehen. Wenn mehrere Geraden durch zwei Punkte möglich sind, dann haben wir uns von vornherein des wichtigsten Bestimmungsprincipes aller Raumlehre, des Principes der Richtung entäußert. Aber auch das Princip der Aehnlichkeit geht verloren. Man denke sich ein beliebiges Dreieck durch Verlängerung zweier Seiten auf zehnfache Größe gebracht. In diesem großen Dreieck soll nun nach jener Annahme die Winkelsumme kleiner sein als in dem ursprünglichen. Nun denke man sich das ursprüngliche Dreieck durch ein ideales, keine Verzerrungen verursachendes Vergrößerungsglas gesehen. Die Vergrößerung sei eine solche, dass die Eckpunkte des so vergrößerten mit denen des durch Verlängerung der Seiten construirten Dreieckes zusammenfallen. Werden nun die Seiten der beiden Dreiecke sich auch decken? Ob sie sich decken oder nicht, in jedem Fall entsteht ein Widerspruch. Decken sich die Seiten, dann ist das vermittelst der Linse vergrößerte Dreieck mit dem andern identisch. Seine Winkelsumme muss dann auch kleiner sein als die des ursprünglichen Dreiecks. Dann aber wäre die Vergrößerung der Linse keine ideale gewesen, wie angenommen; denn die Aenderung der Winkelgrößen ist doch eine Verzerrung. Decken sie sich nicht, dann haben wir zwei verschiedene, in den Eckpunkten coincidirende Figuren, von denen jede beansprucht, das vergrößerte Dreieck zu sein. Ein Dreieck ist dann durch die Lage seiner Ecken nicht bestimmt.

Nun wird man einwenden, meine »ideale« Vergrößerung sei eben

---

1) Psychologie der Axiome, S. 187.

2) Vgl. Stöckel u. Engel, Die Theorie der Parallellinien, S. 261 f.

ganz im Sinne der euklidischen Geometrie gedacht und daher, wenn diese sich als unrichtig erweist, eben nicht ideal, sondern in Wirklichkeit eine Verzerrung. Die einzig richtige »reine« Vergrößerung sei eine von der nicht-euklidischen Geometrie geforderte, wobei die Winkelsumme sich ändere. Ganz recht; dann denke man sich das ursprüngliche Dreieck mittelst einer, vom Standpunkte der nicht-euklidischen Geometrie als durchaus unideal zu betrachtenden Linse vergrößert, deren »Verzerrung« aber gerade darin besteht, dass die Winkel erhalten bleiben. Dann erhebt sich die Frage: Was ist denn nun die aus der winkeltreuen Vergrößerung hervorgegangene Figur? Ist sie auch ein geradliniges Dreieck? Dann hätten wir wieder den Widerspruch der sich in den Eckpunkten, nicht aber hinsichtlich der Seiten deckenden Dreiecke. Ist sie kein Dreieck, was ist sie dann? Jedenfalls ist die Geometrie verpflichtet, sich mit dieser neuen Figur ebenso eingehend zu befassen wie mit dem im nicht-euklidischen Sinne vergrößerten Dreieck.

Nun wird man vielleicht sagen: Die Figur, die durch das entstanden ist, was nach der euklidischen Geometrie ideale, nach der nicht-euklidischen aber verzerrende Vergrößerung bedeutet, ist überhaupt nicht mehr geradlinig. Mit andern Worten: Jede winkeltreue Vergrößerung einer geradlinigen Figur lässt die Geraden zu krummen Linien werden. Damit aber ist der Begriff der Aehnlichkeit aus der nicht-euklidischen Geometrie vollständig verbannt, denn wenn man bei jeder Vergrößerung oder Verkleinerung entweder die Winkeltreue oder die Richtungstreue (Geradlinigkeit) aufgeben muss, dann kann es keine der Gestalt nach ähnlichen Figuren geben. Wenn man dann ein und dasselbe Dreieck in verschiedene Entfernungen projicirt oder aus verschiedenen Entfernungen betrachtet, so darf es sich nicht ähnlich bleiben. Bleibt es geradlinig, so ändern sich die Winkel. Sind die Projectionen winkeltreu, so werden die Seiten krumm. Nun ist aber das, was wir Raumähnlichkeit, Aehnlichkeit der Gestalt nennen, weiter nichts als ein specieller Fall der allgemeinen Größenrelativität. Die nicht-euklidische Geometrie muss daher, wie, wenn ich mich nicht irre, Lobatschewsky schon erkannte, stets mit absoluten Größen operiren. Absolute Größen sind aber nicht allein niemals in der Erfahrung gegeben, sondern sie sind nicht einmal denkbar. Die Relativität aber, mit der sich die nicht-euklidische Geometrie in

unlösbaren Widerspruch setzt, ist eine in jeder Erfahrung und in jedem nothwendigen Gesetz mitgegebene Thatsache.

Wenn nun auch Legendre[1]) beweisen konnte, dass die Winkel im Dreieck zwar nicht größer, wohl aber kleiner als π sein können, sind denn die Begriffe π oder 180° dann auch noch dasselbe, was sie vorher waren? Müsste nicht erst bewiesen werden, dass diese Begriffe ganz unabhängig von dem Dreieckssatz, dem Parallelengesetz und dem damit zusammenhängenden Axiom von der Geraden sind? Wenn man wirklich durch einen Punkt außerhalb einer Geraden zwei Parallelen zu der Geraden ziehen kann, die die Gerade in »unendlich fernen« Punkten schneiden — wobei man, wie es scheint, annehmen soll, dass die zwischen beiden Parallelen durch den Punkt gelegten Geraden, die die Linie überhaupt nicht schneiden, nicht parallel zu jener seien und dass zwischen »gar nicht schneiden« und »in der Unendlichkeit schneiden« ein wesentlicher Unterschied besteht, — dann muss die Gerade doch auch eine Tangente an einem Kreise und der Punkt der Mittelpunkt des Kreises sein können. Es lassen sich also zu jeder Tangente am Kreise mehrere parallele Durchmesser ziehen. Damit ist aber nicht bloß der gewöhnliche Begriff der Parallelen sondern auch der des Lothes, derjenige des rechten Winkels und demnach der Zahl π durchaus geändert. Wenn man also sagt, die Summe der Winkel im Dreieck könne auch kleiner sein als π, so bedeutet dieses π nicht mehr dasselbe wie in dem geläufigen Satze, wonach die Summe der Dreieckswinkel $= \pi$ ist.

Man hat behauptet, Gauß sei, als er die Winkelsumme des Dreiecks Brocken — Inselsberg — hoher Hagen durch genaue Messung ermittelte, in ähnlicher Weise kritisch gegen die Geometrie verfahren, wie Kant in seiner Kritik gegen die Vernunft verfuhr[2]). Es sei denkbar, dass bei weiterer Forschung sich herausstelle, dass das Gesetz von der Winkelsumme für sehr große Dreiecke nicht gilt. Nun kennt aber die Geometrie Euklid's eine solche Verleugnung der Thatsache der Relativität gar nicht. Es gibt keine schlechthin großen und kleinen Dreiecke, und wer einer Figur, deren Winkelsumme mehr oder weniger beträgt als 2 R, den Charakter des gerad-

---

1) Friedrich Engel, Theorie der Parallellinien, S. 212.

2) Fritz Medicus, Kant's transcendentale Aesthetik und die nicht-euklidische Geometrie, S. 35 f.

linigen Dreiecks abspricht, ist ohne weiteres in seinem Rechte; denn wer will mich hindern das geradlinige Dreieck so zu definiren, dass es das Gesetz von der Winkelsumme einschließt. Die Seiten eines Dreiecks, welches diese Bedingung nicht erfüllt, und darum auch die »Geraden« oder »kürzesten Linien« der negativ oder positiv gekrümmten Räume, sind eben krumm. Auf jener unberechtigten Vernachlässigung des Relativitätsgesetzes beruht es dann weiter auch, dass man bei den von Sacheri, Legendre u. A. behandelten Problemen immer von kleinen Abweichungen von 2 R spricht. Was ist denn »klein«? Es ist gar nicht einzusehen, warum diese Abweichungen, wenn überhaupt die ganze Sache einen vernünftigen Boden hat, nicht auch von erheblicher Größe sein sollten.

Es ist auch zu berücksichtigen, was weiter oben über die Einfachheit der Axiome gesagt ist. Gerade darin, dass man nicht in hinreichendem Maße bestrebt war, auf letzte unzerlegbare Raum- und nicht nur Größenverhältnisse zurückzugehen, liegt der Grund des ganzen scholastisch-dialectischen Streites über das Parallelengesetz.

Der Begriff des Parallelismus ist nicht einfach und unanalysirbar. Er enthält neben einem projectivischen, d. h. die reine Ausdehnung angehenden, einen metrischen Bestandtheil. In den geläufigen Definitionen der Parallelen wird dies durch die Einführung von Begriffen verschleiert, die entweder selber weit mehr der Definition bedürfen als der der Parallelen (Abstand), oder aber mit dem Parallelismus nur einen indirecten Zusammenhang haben (Ebene). Euklid definirt die Parallelen als Geraden in einer Ebene, die sich nicht schneiden. Nun ist diese Definition aber viel zu eng; denn die Ebene kann nur in so fern in Betracht kommen, als von einer Anzahl paralleler Linien im Raume nur je zwei in einer Ebene liegen müssen. Definirt man die Parallelen als Geraden, die überall gleichen Abstand haben, so begeht man einen noch viel ärgeren logischen Fehler. Denn, was ist der Abstand oder die Entfernung zweier Linien? Man kann zwar von dem Abstand oder der Distanz zweier Punkte reden; das ist in der That ein elementarer metrischer Begriff. Dem »Abstand zweier Linien« dagegen lässt sich, wie man bei genauerer Ueberlegung leicht einsieht, ein Sinn nur dann beilegen, wenn die Linien parallel sind. Die Begriffe »Ebene« und »Abstand« müssen daher aus der Definition der Parallelen unbedingt verschwinden. Dahingegen lässt sich

der verhältnissmäßig einfache Begriff des Lothes, welcher sowohl zur projectiven wie zur metrischen Betrachtungsweise Beziehungen hat, sehr wohl zur Begriffsbestimmung des Parallelismus verwenden.

Wenn man von irgend einem Punkte einer Curve oder Geraden ein Loth auf eine andere Curve oder Gerade im Raume fällt, und es findet sich, dass dieses Loth nun auch auf der ersten Curve oder Geraden senkrecht steht, so ist das Loth ein gemeinschaftliches Loth der beiden Linien. Oder: Wenn man in irgend einem Punkte einer geraden oder krummen Linie ein Loth errichtet, und dieses Loth auch zu einer anderen geraden oder krummen Linie im Raume normal ist, so ist es ein den beiden Linien gemeinschaftliches Loth. Für gerade Linien im Raume liegen nun bezüglich der gemeinschaftlichen Lothe folgende drei Möglichkeiten vor:

1) Wenn zwischen zwei Geraden kein gemeinschaftliches Loth möglich ist, dann schneiden sich die Geraden irgendwo im Raume.

2) Wenn zwischen zwei Geraden ein gemeinschaftliches Loth möglich ist, dann schneiden sich die Geraden nicht.

3) Wenn zwischen zwei Geraden mehr als ein gemeinschaftliches Loth möglich ist, dann sind die Geraden parallel. (Wenn mehr als ein gemeinschaftliches Loth möglich ist, dann sind unendlich viele möglich).

Demnach ergibt sich als Definition des Parallelismus: Beliebig viele gerade Linien im Raume heißen parallel, wenn jede derselben mit jeder andern durch mehr als ein gemeinschaftliches Loth verbunden werden kann. Der projectivische Bestandtheil dieser Definition besagt, dass sich die Geraden nicht schneiden, oder, was dasselbe ist, dass zwischen je zweien von ihnen ein gemeinsames Loth möglich ist. Das ergänzende und für den Parallelismus ausschlaggebende metrische Kriterium besteht in der Mehrheit der möglichen gemeinschaftlichen Lothe[1]).

---

1) Das Loth ist in den obigen Definitionen nur gewählt, weil es eine gewisse Kürze des Ausdrucks gestattet. Wählt man eine Fassung, die auch für andere sich unter gleichen Winkeln schneidende Transversalen gilt, so wird die Definition ungleich complicirter. Die Bedeutung des Lothes beruht hier nicht auf seiner metrisch ausgezeichneten Stellung (Winkel von 90°), sondern auf seiner rein räumlichen (projectivischen) Eigenschaft als Symmetrie-Scheide zwischen zwei metrisch congruenten und doch verschiedenen Theilen des Raumes. So spielt auch beim Parallelismus in letzter Instanz die primäre Unterscheidung von Rechts und Links eine Rolle.

Auch Hilbert[1]) gibt die Beziehung zur Ebene nicht auf bei seinem »Axiom der Parallelen«, welches auch nach ihm aus zwei Aussagen besteht, nämlich 1), dass es durch einen Punkt zu einer Geraden in der Ebene stets eine Gerade gibt, die die erstere nicht trifft; und 2), dass es nur eine solche Gerade gibt (oder mit anderen Worten: Wenn zwei Geraden einer Ebene eine dritte nicht treffen, so treffen sie auch einander nicht). In seinem Capitel über die Unabhängigkeit des Parallelenaxioms[2]) beweist Hilbert die erste Aussage aus den übrigen Axiomen. Die zweite Aussage dagegen sei unabhängig und daher bestehe die Möglichkeit einer nicht-euklidischen Geometrie. Dieser Schluss aber scheint mir nicht gerechtfertigt, da Hilbert's Definition des Parallelismus der Begriff der Ebene zu Grunde liegt, welchen er ganz euklidisch auffasst; denn eine Ebene ist nach ihm durch drei nicht in einer Geraden liegende Punkte bestimmt. In einem nicht-euklidischen Raume dagegen — auch bei constanter Krümmung — müssen durch je drei Punkte mindestens zwei (nicht-euklidische) »Ebenen« möglich sein, oder aber der Unterschied zwischen euklidischer und nicht-euklidischer Ebene wird belanglos.

In der zweiten, durch das epochemachende Eintreten von Riemann und Helmholtz für die nicht-euklidische Geometrie charakterisirten Entwicklungsstufe der Metageometrie tritt das geometrische, hauptsächlich an das Parallelenaxiom anknüpfende Interesse sehr in den Hintergrund zu Gunsten einer rein algebraischen, analytischen Betrachtungsweise, die entschieden auf den gewaltigen, überall ausschlaggebenden Einfluss der analytischen Geometrie zurückgeführt werden muss. Der Raum ist lediglich Größe und bildet in seiner dreifachen Ausdehnung nur einen speciellen Fall des n-fach ausgedehnten Mannigfachen. So wird der Begriff der Ausdehnung, von welchem durchaus nicht bewiesen wird, dass er überhaupt auf etwas anderes als den gegebenen Raum anwendbar ist, als ein selbstverständliches Attribut jeder Mannigfaltigkeit betrachtet. Hat man sich aber einmal dazu verstanden, das was eine n-fach variable Mannigfaltigkeit heißen sollte, eine n-fach ausgedehnte zu nennen, dann

1) D. Hilbert, Grundlagen der Geometrie. Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauß-Weber-Denkmals. S. 10.

2) Ebenda, S. 22.

ist, da man für Ausdehnung ja auch Dimension sagt, der Schritt von dem n-fach ausgedehnten oder n-dimensionalen Mannigfachen zu dem n-dimensionalen Raume ein sehr naheliegender. So bauen sich großartige mathematische Theorien, denen man in ihrem Oberbau weder Kühnheit noch Eleganz absprechen kann, auf logischen Schnitzern auf, und gar noch solchen, bei welchen ungenügende Begriffsbestimmung und oberflächlicher Sprachgebrauch eine wesentliche Rolle spielen.

In den Arbeiten von Riemann und Helmholtz über nichteuklidische Geometrie spielt neben dem Begriff des Mannigfachen derjenige der Krümmung eine maßgebende Rolle. Unter Krümmung ist ursprünglich offenbar nichts anderes als die Abweichung von der geraden Linie zu verstehen. Da aber diese Abweichung verschiedene Stärke besitzen kann, so bedarf man eines Maßes der Krümmung, als welches der sog. Krümmungsradius, d. i. der Radius desjenigen Kreises, der an der betreffenden Stelle der Curve am nächsten kommt, am geeignetsten ist. (Man pflegt gewöhnlich zu sagen, das Maß sei der Radius des Kreises, der mit der Curve an der betreffenden Stelle drei auf einander folgende Punkte gemein habe. Diese Ausdrucksweise ist jedoch verwerflich, da es erstens keine auf einander folgende oder benachbarte Punkte geben kann, und da zweitens, selbst wenn es welche gäbe, ein Kreis durch drei auf einander folgende Punkte nicht bestimmt sein könnte.)

Das Gauß'sche Krümmungsmaß für Flächen scheint nicht so ganz über alle Zweifel erhaben. Es versucht die Krümmung einer Fläche zu bestimmen, ohne aus der Fläche herauszugehen. Es wird dargestellt durch das Product zweier linearer Größen, und stellt daher, ohne weiteres, nichts als eine lineare Größe dar. Auch der Krümmungsradius ist ja eine lineare Größe, aber er ist doch ein Radius, also ein Repräsentant einer Flächenfigur. So wie aber die Krümmung einer Linie die Ebene oder wenigstens die Fläche voraussetzt, und nur durch eine Flächengröße (man meint doch den Krümmungskreis, wenn man auch vom Krümmungsradius spricht) gemessen werden kann, so setzt auch die Flächenkrümmung das Körperliche voraus und kann nur durch ein Körperliches gemessen werden. Schon die Thatsache, dass nach der Gauß'schen Betrachtungsweise eine Fläche, die das Krümmungsmaß 0 besitzt, durchaus nicht nothwendig identisch ist mit einer nicht gekrümmten Fläche (hierher

gehören Ebene, Cylinder- und Kegelmantel) sondern lediglich eine Fläche bedeutet, die nicht in mehr als einer Richtung gekrümmt ist, sollte uns hinsichtlich des Begriffs des Krümmungsmaßes stutzig machen. Nimmt man aber den Begriff in dieser Fassung an und willigt ein, den genannten Flächen das Krümmungsmaß 0 zuzuschreiben, und die Flächen mit dem Krümmungsmaße 0 zu den Flächen mit constanter Krümmung zu rechnen, dann hat man offenbar zwei Arten von Flächen mit constanter Krümmung; eine Art nämlich, in welcher man jede Figur oder Curve beliebig verschieben und drehen kann, ohne die lineare Krümmung zu ändern (wie die sphärische Fläche und die Ebene), und eine andere, in welcher man zwar Verschiebungen in der Richtung von geodätischen Linien, nicht aber Drehungen und Verschiebungen in den Richtungen anderer Linien vornehmen kann (Kegel, Cylinder).

Dieser weder eindeutige noch sonst einwandsfreie Begriff des Krümmungsmaßes, der den allseitig ausgedehnten Raum voraussetzt und nur auf Raumgrenzen anwendbar ist, wird dann auf den Raum selbst angewandt. Während die Krümmung doch eine Richtungsänderung im Raume ist, spricht man auf einmal von der Krümmung des Raumes selbst und unterscheidet, analog der Eintheilung der Flächen, Räume von constanter und solche von nichtconstanter Krümmung. Dabei sollen constantes Krümmungsmaß des Raumes, Congruenz des Raumes und freie Beweglichkeit ziemlich gleichbedeutende Begriffe sein. Nun wolle man bedenken, dass Flächen von inconstantem Krümmungsmaße uns nur im congruenten Raume, d. h. in einem Raume gegeben sind, in welchem man ein Raumgebilde frei nach allen Orten bewegt denken kann, ohne seine Größe oder Gestalt zu ändern. Also dieser Raum von constanter Krümmung, und zwar dem Krümmungsmaße 0, ist die Voraussetzung der Beurtheilung des Krümmungsmaßes von Flächen. D i e U n t e r s c h e i d u n g d e r C o n s t a n z o d e r N i c h t c o n s t a n z d e s K r ü m m u n g s m a ß e s i m S y s t e m v o n $n-1$ D i m e n s i o n e n s e t z t d a h e r d i e T h a t s ä c h l i c h k e i t d e r C o n s t a n z u n d C o n g r u e n z d e s n-d i m e n s i o n a l e n S y s t e m s v o r a u s. Wenn demnach unser Raum von 3 Dimensionen nicht ein specieller Fall einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit ist, haben wir eigentlich gar kein Mittel, um nachzuweisen, dass unser Raum wirklich constante Krümmung besitzt,

Denn Wesen, die in einem incongruenten Raume existiren, können ja die bei den Ortsveränderungen von geometrischen Gebilden oder materiellen Körpern in einem solchen Raume unvermeidlichen Verzerrungen gar nicht merken, wenn sie nicht gleich einen Raum, in welchem Congruenz und freie Beweglichkeit erhalten sind, zum Vergleich daneben haben.

Nun kann zum Ueberfluss das Krümmungsmaß auch noch negativ werden. Helmholtz hat dies zwar anfänglich geleugnet, aber ein anderer Mathematiker, der Italiener Beltrami, macht die n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten von constanter, negativer Krümmung zum vornehmsten Gegenstand seiner Forschung. Wenn man nun bedenkt, dass negativ im Raume nie etwas anderes bedeuten kann, als eine Richtung, die zu einer anderen Richtung, die man willkürlich als positiv bezeichnet hat, antagonistisch ist, so dass man also jeder Zeit unbeschadet der Anschauung oder Rechnung negativ und positiv vertauschen kann, so muss man zugeben, dass der Begriff des negativen Krümmungsmaßes ein ebenso inhaltsloser Pseudobegriff ist, wie etwa der der negativen Farbe oder der negativen Farbensättigung oder Helligkeit. Aber wir haben gesehen, schon die Krümmung des Raumes ist ein mit inneren Widersprüchen behafteter Scheinbegriff. Der congruente Raum ist das, was den Begriff der Krümmung überhaupt erst möglich macht. Da sich der Löwe nicht selbst den Kopf abbeißen kann, so können daher nur Raumgrenzen, nicht aber der Raum selbst gekrümmt sein. So gut wie der Mathematiker von einem gekrümmten Raum spricht, könnte der Psychologe auch von einer krummen Farbe oder von einem krummen Bewusstsein reden. Und wenn man ihn bäte, solche interessanten Dinge doch auch einmal vorzudemonstriren, dann könnte er mit demselben Rechte, mit dem es der Mathematiker thut, antworten: »Ja lieber Freund, so etwas kann man sich zwar nicht vorstellen, aber man kann sich's wenigstens denken.« Ich behaupte aber, kein Mensch kann sich etwas denken, was einen Widerspruch enthält. Wohl kann man sagen, dass man sich's denke, aber dann sagt man die — Unwahrheit. So z. B. will es mir nie gelingen, mir ein materielles Atom zu denken, da ich ihm die widersprechenden Eigenschaften der Ausdehnung und der Untheilbarkeit zuschreiben muss. Wenn ich daher diesen Terminus dennoch gebrauche, so sind die folgenden drei Fälle möglich: Entweder sage

ich die Unwahrheit, d. h. ich mache den Hörer oder Leser glauben, dass ich bei dem Gebrauch des Wortes Atom einen Begriff habe, während ich doch weiter nichts habe als das Wort; oder zweitens, ich gebe dem Worte eine ganz willkürliche Definition, die den oben gerügten Widerspruch weder offen noch versteckt enthält; in diesem Falle aber hat der Begriff gar nichts vor dem des kleinen (nicht kleinsten) Theilchens voraus. Oder endlich ich gebrauche ihn kritiklos, als »Heerdenthier« dem »guten Beispiel« Anderer folgend — und das ist auch eine Art Unwahrheit. Ich bin übrigens überzeugt, dass der größte Theil des sog. Gedankenaustausches durch die Sprache, im täglichen Leben, und ein guter Theil auch in der Wissenschaft, aus solcher kritiklosen, dem thierischen Nachahmungstriebe entstammenden, Heerdenthiersprache besteht.

Bei dieser Gelegenheit möchte ich bemerken, dass es mir auch nicht gelingen will, den Ausdrücken Form und Inhalt, Inneres und Aeusseres, die sich in der Philosophie und Psychologie einer so vielseitigen Verwendung erfreuen, einen andern als rein räumlichen Sinn beizulegen, es sei denn, dass ich sie ganz willkürlich und ohne jegliche Beziehung zu ihrer ursprünglichen Bedeutung definire. Ueberall da, wo diese Ausdrücke auf anderes als Räumliches übertragen werden, da ist diese Uebertragung rein willkürlich und höchstens durch zufällige Berührungsassociationen mitbedingt. Man hätte gerade so gut auch zwei neue Worte erfinden oder die Ausdrücke umgekehrt gebrauchen können, d. h. das Form und Aeußeres nennen können, was jetzt Inhalt und Inneres heißt, und umgekehrt.

Auch den oben erwähnten, so häufig gemachten Einwand, dass man sich wohl denken könne, was man sich nicht vorzustellen im Stande sei, müssen wir mit Entschiedenheit abweisen. Denken und Vorstellen sind gar nicht scharf zu trennende Vorgänge. Darum ist auch die Ansicht von Schmitz-Dumont[1]), dass der Raum überhaupt nicht vorgestellt, sondern nur gedacht werde, entschieden zu verwerfen. Da wir den leeren Raum nirgends wahrnehmen, so sind nach ihm die Raumeigenschaften und Raumverhältnisse nur denkend gesetzte Bestimmungen. Vorgestellt, sagt er, werden nur Körper mit sinnlich wahrnehmbaren Eigenschaften. Hiergegen ist einzu-

---

1) Naturphilosophie und exacte Wissenschaft, S. 151.

wenden, dass die Raumeigenschaften genau so gut sinnlich wahrnehmbar sind, wie die sog. Sinnesqualitäten. An einer rothen Fläche nehme ich eben so wohl die Ausdehnung wie die Qualität »roth« direct wahr. Zwar kann die Ausdehnung ohne Sinnesqualität nicht wahrgenommen werden; aber die Sinnesqualität kann dies eben so wenig ohne die Ausdehnung. Wenn das Räumliche wirklich nur »gedacht« und nicht vorgestellt und angeschaut würde, so hätte Liebmann Recht, der den Riemann'schen und Helmholtz'schen Begriff der höheren Dimensionen, trotz der mangelnden Fähigkeit des Anschauungsvermögens, sich etwas dem Begriffe entsprechendes vorzustellen, für logisch durchaus unbedenklich erklärt. Aber der von Liebmann[1]) auf Kant'scher Grundlage so sehr betonte Gegensatz zwischen anschaulicher und logischer Nothwendigkeit ist im Grunde genommen eine sprachliche Fiction. Es gibt keine andere Nothwendigkeit als die geometrisch-anschauliche.

Wenn wir uns nicht auf den Standpunkt der vergangenen Tagen angehörenden Theorie der Seelenvermögen stellen wollen, so müssen wir mit Wundt annehmen, dass es kein Denken ohne Vorstellen und kein Vorstellen ohne Denken gibt. Die Producte des Denkens, die Begriffe, sind doch nur stellvertretende Vorstellungen, begleitet von gewissen anderen Vorstellungen. Der Allgemeinbegriff des Dreiecks ist weiter nichts als die Vorstellung von einem beliebigen speciellen Dreieck, begleitet von der Nebenvorstellung, dass alles, was man von diesem Dreieck aussagen wolle, auch von jedem andern Dreieck gelte. Der Bereich des Vorstellens und Denkens umfasst daher alles, was sich widerspruchslos definiren (beschreiben) lässt, d. h. alles was sich unmittelbar oder mittelbar als explicite Function letzter nicht weiter analysirbarer, im Bewusstsein gegebener Elemente darstellen lässt. Diese Elemente sind entweder assertorischer, d. h. thatsächlicher, wie die Sinnesqualitäten, oder apodictischer, d. i. nothwendiger Natur, wie die logisch-mathematischen Axiome[2]).

---

1) Naturphilosophie und exacte Wissenschaft, S. 79.

2) Ich behalte die Begriffe »assertorisch« und »apodictisch« bei als verhältnissmäßig passend, möchte aber alle erkenntnisstheoretischen Betrachtungen von zweideutigen Begriffen, wie Erfahrung, a priori u. s. w., emancipirt wissen. Beide oben genannte Arten von Elementen besitzen (absolute, denn es gibt keine andere) Gewissheit. Assertorisch gewiss nenne ich diejenigen Elemente, die im gegebenen

Wenn nun jemand einen Ausdruck, ein Wort, gebraucht und vorgibt, es stecke ein Begriff dahinter, und er könne sich etwas Bestimmtes dabei denken oder vorstellen, so ist mit dieser Aussage, auch wenn sie mit größter Zuversichtlichkeit gethan wird, die Legitimation des betreffenden Wortes als Begriff noch keineswegs gegeben. Denn da die Vorsehung den Menschen mit der Fähigkeit ausgestattet hat, der Wahrheit auch einmal ein Schnippchen zu schlagen, sei es nun mit voller Absicht oder nur aus Fahrlässigkeit, Bequemlichkeit etc. (was man gewöhnlich Irrthum nennt), so kann ja die in Frage stehende Aussage auch falsch sein. Es kann ja auch einer kommen und sagen: Ich kann mir ein rundes Dreieck, eine eckige Kugel, einen violetten Schmerz und einen salzigen Ton vorstellen oder denken. Was für ein Kriterium haben wir nun, um solche aus leeren oder sich widersprechenden Worten bestehende Scheinbegriffe von einem wirklichen Begriffe zu unterscheiden? Kein anderes als das der widerspruchslosen Definition. Wenn ein Wort nicht eine elementare, der weiteren Zerlegung nicht mehr fähige Thatsache oder Nothwendigkeit (in welchem Falle weder Beschreibung noch Erklärung, sondern nur Aufzeigung möglich ist) bezeichnet, so muss sich seine Bedeutung als eine Function jener Elementarthatsachen und Axiome darstellen lassen, oder aber es bleibt ein trügerisches Wort, ein Pseudobegriff, dessen Anwendung jedes Mal Täuschungen verursacht.

Solange daher die Metamathematiker nicht im Stande sind ihre Begriffe wie »Krümmungsmaß des Raumes«, oder »Krümmung einer allgemeinen Maßbestimmung«[1]), »vierdimensionale Ebene«, »unendlich ferne« und »imaginäre Punkte« u. s. w. in der angegebenen Weise (das heisst auf Elemente, nicht auf andere unklare Begriffe zurückgehend) klar und eindeutig zu definiren, wird man das Recht haben, diesen »Begriffen« mit Misstrauen zu begegnen, bezw. sie als Pseudobegriffe zu betrachten.

Nun wird der Mathematiker einwenden, diese Begriffe seien vollständig hinreichend definirt und zwar durch ganz eindeutige algebra-

---

Bewusstseinsinhalt so sind, die ich mir aber ebenso gut anders denken könnte. Apodictisch gewiss dagegen nenne ich die, die immer und überall so sind und die ich mir unter keinen Umständen anders denken könnte.

1) Felix Klein, Ueber die nicht-euklidische Geometrie. Mathemat. Ann., IV, S. 595.

ische Ausdrücke. Ich behaupte aber, solche Ausdrücke bestimmen nur eindeutig, soweit es die der allgemeinen 1-dimensionalen Größenlehre angehörenden Maßverhältnisse anbelangt, und bestimmen gar nichts mit Bezug auf Raum und Räumliches. Will man jene Begriffe so definiren, dass sie auf Räumliches anwendbar sind, so muss man sie auf letzte, elementare Raumattribute zurückführen.

Wenn man beispielsweise bei der projectivischen Maßbestimmung den mit einer Constante c multiplicirten Logarithmus eines gewissen Doppelverhältnisses als »Entfernung« zweier Punkte, den mit einer anderen Constante c' multiplicirten Logarithmus eines anderen Doppelverhältnisses als »Winkel zweier Ebenen« bezeichnet[1]), so haben die so definirten Begriffe »Entfernung« und »Winkel« nicht allein keine Aehnlichkeit mehr mit dem, was man gewöhnlich mit diesen Worten bezeichnet, sondern sie haben überhaupt keinen Zusammenhang mehr mit dem Raume, es sei denn, dass man zuvor die sämmtlichen zur Benutzung gelangten rechnerischen Operationen wie Multiplication, Logarithmus, Doppelverhältniss etc., in einem von dem arithmetischen abweichenden, rein räumlichen Sinne definirt hat. Was man beispielsweise unter der Multiplication von Richtungen verstehen will, hat entweder mit dem Begriff der Multiplication oder mit dem der Richtung nichts mehr zu thun; denn Richtungen lassen sich eben so wenig mit einander multipliciren, wie etwa Farben oder Töne. Man gibt vor, unter völliger Vermeidung metrischer Begriffe neue Coordinatensysteme, Maßbestimmungen, Rechnungsmethoden einzuführen[2]); warum enthält man sich denn nicht auch der metrischen Ausdrucksweise, die doch irreführen und zu Täuschungen Anlass geben muss. Wenn man aber bei den projectivischen Coordinaten eine solche Wahl der Zahlen trifft, dass sie auch für die metrische Betrachtung passen, so hat man nicht, wie Whitehead meint, die metrische Betrachtungsweise der projectivischen untergeordnet, sondern man hat sie beide unter einen, im Grunde genommen doch metrischen Hut gebracht.

---

1) Felix Klein, Ueber die nicht-euklidische Geometrie. Mathemat. Ann., IV, S. 574.

2) Vgl. auch die von Natorp besonders an dem projectivischen Distanzbegriff geübte Kritik: Zu den logischen Grundlagen der neueren Mathematik. Arch. f. system. Philos., VII, S. 202 ff.

Ein Mathematiker hat mir gesagt: Das Krümmungsmaß, die Krümmung eines Raumes, haben mit krumm nichts mehr zu thun. Dann muss man aber fragen: Warum nennt ihr diese Dinge denn so? Und warum verfallt ihr, sobald ihr eure nicht-euklidischen Ideen oder Begriffe veranschaulichen wollt, immer wieder in die euklidische Geometrie zurück? Warum, wenn ihr negativ gekrümmte Flächen eines pseudosphärischen oder hyperbolischen Raumes euren Hörern oder Lesern wenigstens sinnbildlich veranschaulichen wollt, zeichnet ihr dann immer irgend eine positiv gekrümmte Fläche des euklidischen Raumes? Ist es euch niemals aufgefallen, dass eure negative Krümmung der einzige Fall ist, wo das Negative selbständig ohne sein positives Correlat, d. h. nicht als Umkehrung oder Antagonismus eines Positiven auftreten soll? Was würde man halten von einem Menschen, der behauptete, er könne sich außer den dem normalen Gesichtssinne zu Gebote stehenden Farben und Farbenverhältnissen noch andere vorstellen oder denken, und diese Aussage in allerhand algebraische Formeln kleidete, der aber, aufgefordert seine Farbenbegriffe in Farben und nicht in Zahlen zu definiren und zu illustriren, zum Beweise immer nur vorbrächte, was sich auf den ersten Blick als den bekannten Farben zugehörig documentirte[1]? Das Ideal einer wissenschaftlichen Terminologie fordert, dass jeder Begriff eindeutig als Function letzter nicht weiter zerlegbarer Grundthatsachen und Grundnothwendigkeiten definirt werde, dass nirgends dasselbe Wort für verschiedene Begriffe gebraucht und nie derselbe Begriff mit verschiedenen Worten bezeichnet werde. Wir behaupten: Wenn einmal dieses Ideal in der Mathematik verwirklicht ist, dann wird von all den nicht-euklidischen Räumen und andern metageometrischen Speculationen nichts mehr übrig geblieben sein.

Kroman[2]) wirft mit Recht Riemann und Helmholtz vor, dass sie sich über ihre nicht-euklidischen Räume »kaum irgendwo wirklich klar ausgedrückt« haben. Aber kann man denn überhaupt von einem consequenten und radicalen Empiriker vollständige Klarheit verlangen?

---

1) Dass dieser Einwand mit der individuellen Verschiedenheit der Farbenempfindungssysteme (Farbenblindheit u. s. w.) nichts zu thun hat, braucht wohl kaum erst gesagt zu werden. Vgl. übrigens meine Abhandlung: Beiträge zur Kenntniss der Farbenblindheit. Philos. Studien, VIII, S. 182.

2) Unsere Naturerkenntniss, S. 145.

Muss er nicht von vornherein zugestehen, dass sich alle seine Definitionen und Erklärungen im Kreise bewegen, da er keinen Punkt, der fester steht als irgend ein anderer, zum Anfangspunkt hat? Wer nicht von einer Gewissheit ausgeht, kann nie zu einer solchen gelangen. Es muss deshalb auch sehr Wunder nehmen, dass die Verfechter dieser Theorien es mit ihrem Empirismus vereinigen konnten, der mathematischen Analysis eine solche Bedeutung und alles beherrschende Stellung beizulegen. Der übertriebene Empirismus ist übrigens bereits beträchtlich gemildert und es ist zu erwarten, dass es der aufstrebenden projectiven Geometrie gelingen wird, das mathematische Denken auf Bahnen zurückzulenken, die den Zusammenhang mit dem ureigenen Gebiete der Mathematik, dem Räumlich-Anschaulichen nicht wieder verlieren. Vorläufig aber herrscht die sog. Analysis, deren folgenschwerster Fehler darin besteht, dass sie willkürlich gewählte Symbole, die gewisse Complexe von Thatsachen oder Nothwendigkeiten, von einem bestimmten Gesichtspunkte betrachtet, correct zu repräsentiren im Stande sind, so verwendet, als ob sie die betreffenden Complexe von jedem Standpunkt aus betrachtet adäquat repräsentirten. Auf diesem Fehler, verbunden mit einem gewissen Spielen mit theils undefinirten und widerspruchsvollen, theils zweideutigen Begriffen beruht die ganze Pan- und Metageometrie. Zu diesen zweifelhaften Begriffen gehört beispielsweise der der kürzesten Linien. Was in der Ebene die Gerade ist, das vertritt auf gekrümmten Körperoberflächen die geodätische Linie, auf einer sphärischen Fläche z. B. der größte Kreis. In der Ebene wie im Raume überhaupt wird der Abstand zweier Punkte, d. i. der kürzeste Weg, durch die gerade Linie gemessen. Das ist das allererste Axiom aller metrischen Geometrie. Auf einer gekrümmten Fläche wird der Abstand zweier Punkte durch das zwischen ihnen gelegene Stück der geodätischen Linie gemessen, aber wohlverstanden, nur wenn es nicht möglich ist, den einfachen, räumlich kürzesten Weg, die den Körper durchsetzende Gerade, zu wählen, oder wenn man gar nicht den wirklich kürzesten Weg, sondern den an der Oberfläche verlaufenden kürzesten messen will. Im letzteren Falle hat man kein Recht, den auf der geodätischen Linie gemessenen Abstand als absolut kürzeste Linie zu bezeichnen, und im ersteren Falle

handelt es sich um eine Sache der Physik, nicht der Geometrie; denn bei einem geometrischen Körper können wir stets die directen Abstände durch den Raum messen. Mit diesem erschlichenen Begriffe der kürzesten Linie lassen sich dann nachher allerhand schöne Dinge ausführen.

Anfangs unterschied man neben dem gegebenen oder ebenen Raum noch sphärische und pseudosphärische Räume. In dem 3-dimensionalen sphärischen Raum laufen alle kürzesten Linien in sich selbst zurück. Es wird uns außerordentlich schwer, den Gedanken von Helmholtz zu folgen, wenn er behauptet, in einem solchen Raume gäbe es keine Parallelen, also keine Linien mit gleichem Abstand von anderen Linien. Ferner ist nach Helmholtz der sphärische Raum zwar unbegrenzt aber endlich. Wenn wir uns einen derartigen Raum mit anschauenden Wesen belebt denken, so müsste deren Anschauungsvermögen recht eigenthümlich beschaffen sein. Sie könnten zwar mit der Arithmetik und Algebra vertraut sein, aber der Begriff der geraden Linie wäre ihnen unbekannt. Wenn sie sich von irgend einem Punkte ihres Raumes fortbewegten und eine Richtung einhielten, die für sie einen kürzesten Weg bedeutete, so müssten sie immer wieder an die Ausgangsstelle zurückkommen und dürften sich nicht einmal dessen wundern. Und wenn diese Wesen eines schönen Tages auf die Idee kämen, zur Abwechselung einmal so zu reisen, dass sie nicht wieder zum Ausgangspunkt zurückkämen, und wenn sie dann entdeckten, dass es eine Linie gäbe, die zu diesem Zwecke die günstigste ist, die nämlich, die wir die gerade nennen, so müsste diese Gerade aber den sphärischen Wesen als die aller»krummste« erscheinen und sie dürften nicht merken, dass sie die Distanz zwischen zwei Punkten in einer solchen Linie in einer geringeren Zahl von Schritten zurücklegten als auf jedem anderen Wege. Man sieht, welch' ein Rattennest von Ungereimtheiten und Widersprüchen schon in dem sphärischen Raume steckt; und der ist von allen nicht-euklidischen noch der verhältnissmäßig einfachste. Das Widersinnigste ist, dass der sphärische Raum unbegrenzt, aber doch nicht unendlich sein soll. Das ist denn doch ein gar zu oberflächliches und plumpes Spielen mit dem zweideutigen Begriffe des Unbegrenzten. Unbegrenzt bedeutet für gewöhnlich so viel als »keine Grenzen haben« und ist demnach gleichbedeutend mit

unendlich. Manchmal aber bezeichnet man auch in ganz anderem Sinne eine geschlossene, stetige Curve oder eine ohne Unterbrechung der Stetigkeit in sich zurücklaufende krumme Fläche als unbegrenzt. Aber auch in diesem Sinne angewandt hat der Begriff nur eine beschränkte Geltung. Wenn ich z. B. den Kreis oder die Kugel unbegrenzt nenne, so bezieht sich das nur auf die Kreisperipherie und die Kugeloberfläche. Die Kreisfläche und der Kugelkörper sind stets begrenzt. Es können also nur Raumgrenzen, nicht aber ganze Räume in diesem Sinne »unbegrenzt« sein. Von den Planetenbahnen könnte man eventuell sagen, dass sie unbegrenzt aber endlich seien. Von einem endlichen Raume ausgesagt, muss es aber immer eine Absurdität bleiben. Es ist zwar behauptet worden (Riemann), dass Unbegrenztheit und Unendlichkeit schon deshalb auseinander gehalten werden müssten, weil erstere eine Sache der Ausdehnung, letztere eine solche der Größe (Maßverhältnisse) sei. Es erscheint mir aber zweifelhaft, ob die Vertreter dieser Ansicht Ausdehnung und Maßverhältnisse dabei genügend auseinander gehalten haben. Uebrigens ist gerade die Unendlichkeit, wie wir später sehen werden, ein von der Ausdehnung, d. i. dem Charakteristischen des Raumes, untrennbarer Begriff.

Das Unbegrenzte, wenn es nicht als mit dem Unendlichen identisch genommen wird, ist also weiter nichts, als das sich selbst Begrenzende, das in sich Geschlossene oder Zurücklaufende. Nun ist eigentlich gar nicht einzusehen, warum man diese Bezeichnung auf stetig gekrümmte Linien oder Flächen beschränken soll. Die Peripherie eines Polygons, die Oberfläche eines Polyeders ist doch genau so gut unbegrenzt, wie die Kreislinie oder Kugelfläche. Ob ich mich bei der Bewegung in einer solchen Curve oder Fläche stetig drehe oder hier und da um eine Ecke biege, macht doch hinsichtlich dessen, was für die Unbegrenztheit charakteristisch ist, nämlich das In-sich-zurückkehren, keinen wesentlichen Unterschied. Man kann daher jeden allseitig begrenzten Körper als von einer unbegrenzten Fläche umschlossen ansehen. Anderseits, wenn eine Kreisperipherie ein unbegrenztes Gebilde darstellt, so könnte man auch von unbegrenzt endlichen Räumen innerhalb des euklidischen, wenigstens solchen, die in einer Richtung unbegrenzt sind, sprechen, wie Ringe, Kettenglieder u. s. w. Auch könnte man mit gutem Rechte das in sich

geschlossene System der Farbenqualitäten ein unbegrenztes nennen. Da übrigens ein unbegrenztes Gebilde von n Dimensionen ein von ihm begrenztes von $n+1$ Dimensionen voraussetzt[1]), so wäre mit einem unbegrenzten 3-dimensionalen Raume die Nothwendigkeit eines 4-dimensionalen gegeben.

Auch der pseudosphärische Raum hat recht interessante Eigenschaften. In seinen, den Ebenen des euklidischen Raumes entsprechenden »ebensten Flächen« kann man beispielsweise durch jeden Punkt zu jeder Geraden ganze Scharen paralleler Linien ziehen. Während im sphärischen Raume die Summe der Winkel im Dreieck stets größer ist als 180°, erreicht sie im pseudo-sphärischen Raume diesen Werth niemals.

Neuere Vertreter der Metamathematik, wie Felix Klein u. A. suchen die nicht-euklidische Geometrie mit der projectiven in Verbindung zu bringen, wobei es natürlich ohne Maßbestimmung und Coordinaten nicht abgeht[2]), obgleich die projective Geometrie, wenn sie eine consequente Ausdehnungs- und nicht Größenlehre sein wollte, die Begriffe der Entfernung, Strecke, Winkelgröße nicht kennen dürfte. Man spricht dann von hyperbolischen und elliptischen Räumen im Gegensatz zu dem gegebenen, der parabolisch ist, und führt neue, unklare Begriffe, wie hyperbolisches und elliptisches Entfernungsmaß, ein. In der elliptischen Geometrie laufen die »Geraden« natürlich in sich selbst zurück, oder wie man sich »noch deutlicher« ausdrückt, sie besitzen zwei imaginäre, unendlich ferne Punkte. Während im sphärischen Raume die geodätischen Linien zwei Punkte gemein haben können, können sie sich im elliptischen Raume nur in einem Punkte schneiden. Jedem Punkte im elliptischen Raume entsprechen zwei im sphärischen. Wie wenig übereinstimmend die Ideen über diese nicht-euklidischen Räume sind, lässt sich daraus ersehen, dass es Metamathematiker gibt, welche den von Klein so stark betonten Unterschied zwischen sphärischer und elliptischer Geometrie gar nicht anerkennen und behaupten, beide Räume seien gar nicht verschieden.

In der hyperbolischen Geometrie besitzt jede »Gerade« zwei unendlich ferne Punkte. Aber es kann offenbar solche Geraden nicht

1) Milau, Aus den Grenzgebieten der Mathematik und Philosophie, S. 32.

2) Vgl. auch Natorp, Zu den log. Grundlagen der neueren Mathematik, II. Arch. f. system. Philos., VII, S. 207.

in allen möglichen »Richtungen« geben, denn alle jene unendlich fernen Endpunkte der Geraden bilden zusammen eine reelle gekrümmte Fläche zweiter Ordnung. Da aber auf der Grenzfläche des hyperbolischen Raumes (nach Lindemann) die euklidische Geometrie gilt, so besitzen wir eigentlich gar kein Kriterium zur Unterscheidung von Ebenen und solchen hyperbolischen Grenzflächen. Ja, vielleicht ist unser ganzer gegebener Raum nur die 3-dimensionale Grenzform eines 4-dimensionalen hyperbolischen Raumes.

Der gegebene Raum der Wirklichkeit wird im Gegensatz zu den nicht-euklidischen als ebener oder auch als parabolischer Raum bezeichnet. Das hat auch ohne jede Bezugnahme auf nicht-euklidische Geometrie und metageometrische Raumformen seine Berechtigung, da neben der Geraden und dem Kreise die Parabel unter allen im Raume möglichen Curven eine ganz eigenartige bevorzugte Stellung einnimmt, indem sie sich nämlich stets selbst ähnlich bleibt. Wenn man bei der Betrachtung der Raumgebilde unter Annahme der Relativität aller Größen den Factor der absoluten Größe vernachlässigt und nur die Gestalt in Betracht zieht, so gibt es nur eine Gerade, nur einen Kreis und eine Parabel. Mit anderen Worten: Alle Parabeln sind einander ähnlich. Es hätte daher einen gewissen Sinn, den ebenen oder geraden Raum auch den sphärischen oder parabolischen zu nennen.

Es muss übrigens anerkannt werden, dass die Begründer der neuesten, bereits unter dem Einfluss der projectivischen Geometrie stehenden Phase der Metageometrie nicht so sehr von nicht-euklidischen Räumen, als von nicht-euklidischer Geometrie reden, und Cayley hat es direct ausgesprochen, dass »nicht-euklidischer Raum« von vornherein ein unzulässiger Begriff sei. Damit aber gesteht man doch gewissermaßen zu, dass die metageometrischen Speculationen im Grunde genommen mit räumlichen Dingen nichts zu thun haben; dann sollte man aber consequenter Weise auch nicht von »Geometrie« dabei reden, sondern die Producte dieser Speculationen als das bezeichnen, was sie sind, nämlich analytische Formeln der an und für sich stets auf das Eindimensionale beschränkten Größenlehre, die man auf den allseitig ausgedehnten Raum und seine nicht 1-dimensionalen Verhältnisse nur so weit anwenden kann, als sich dabei keine Widersprüche ergeben.

Man hat gesagt[1]: Man könne zwar ein Minder von Dimensionen, nämlich einen 2-dimensionalen Raum, intuitiv auffassen, ein Mehr nicht. Aber die Abstraction sei nicht an das Intuitive gebunden, und man könne daher mit derselben Berechtigung von n-fach Ausgedehntem reden, wie etwa von negativen und imaginären Zahlen. Hiergegen muss zunächst eingewandt werden, dass Niemand einen rein 2-dimensionalen Raum intuitiv aufzufassen im stande ist[2]. Wir können uns, wie wir weiter unten sehen werden, Flächen auch nur im allseitig ausgedehnten Raum vorstellen oder denken. Ferner sind negative und imaginäre Zahlen anerkanntermaßen rechnerische Hülfsbegriffe, die ihrer alogischen Eigenschaften wegen am Ende des Calcüls wieder ausgemerzt sein müssen. Der Raum von n-Dimensionen dagegen soll doch so eine Art Wesenheit sein, die den gegebenen »3-dimensionalen« Raum als speciellen Fall einschließt. Uebrigens könnte man diese an die Intuition nicht gebundene Abstraction mit dem gleichen Rechte auch für andere Gebiete als das des Raumes in Anspruch nehmen. So könnte man verlangen, dass die ja ebenfalls 3-dimensional genannten Systeme der optischen und akustischen Empfindungen als beschränkte und specielle Fälle von Systemen höherer Ordnung von Licht- resp. Schallempfindungen aufgefasst würden. Die wissenschaftliche Berechtigung einer solchen Pan-Optik und Meta-Akustik ist um nichts geringer als diejenige der modernen Ueber-Mathematik.

Ein anderer Gesichtspunkt, welcher der Hypothese von der vierten und den höheren Dimensionen Vorschub leistet, ist der folgende: Die erste Potenz der Zahlen drückt lineare, die zweite Flächengrößen aus, die dritte bezeichnet Körpergrößen. Sollten da nun die vierte, die fünfte und die höheren Potenzen nicht auch etwas Ausgedehntes repräsentiren? Nun ist diese Analogie zwischen Dimensionen und Potenzen aber eine ziemlich unvollkommene. Da $x^0 = 1$ ist, so müsste die nullte Potenz die Einheit ausdrücken, und da die Einheit nicht wieder eine lineare Größe sein könnte, — denn lineare Größen werden durch die erste Potenz repräsentirt — so müsste man den Punkt als Einheit ansehen. Was würde dann aber aus den räum-

1) Liebmann, Zur Analysis der Wirklichkeit, S. 57.

2) Vgl. auch Wundt, Logik I, S. 494.

lichen Repräsentanten der Potenzen mit negativen und gebrochenen Exponenten? Ist es somit ausgeschlossen, den Parallelismus zwischen Potenzen und Dimensionen nach unten hin über das Gegebene hinaus fortzusetzen, so fehlt auch jede Veranlassung dies nach oben zu thun.

Dass man Flächen als zweite, Körper als dritte Potenzen betrachten kann, in der Rechnung, stellt nichts mehr als eine zufällige Analogie dar, so wie man auch die Reihe der farblosen Lichtempfindungen als 1-dimensionale und das gesammte System der Licht- und Farbenempfindungen als 3-dimensionale Mannigfaltigkeit darstellt. Eben so wenig wie Licht und Farbe an sich etwas mit Coordinaten zu thun haben, eben so wenig bestehen von Hause aus jene Beziehungen zwischen Raumgebilden und Potenzen. Der Ausdruck a^2 bedeutet nicht nothwendig eine quadratische Fläche, noch $a\,b$ ein Rechteck. Diese Ausdrücke können eben so gut einfache lineare Größen bezeichnen. Die Zahl 64 kann eine gerade Linie von der Länge 64, ein Quadrat von der Seitenlänge 8 und einen Würfel von der Kantenlänge 4 bezeichnen.

Mit demselben Rechte, mit welchem man für die höheren Potenzen Raumcorrelate verlangt, könnte man auch Folgendes annehmen: In der gewöhnlichen Algebra ist nur für den einen Fall der Zahl 16 $n^y = y^n$. In keinem anderen Fall kann man Basis und Exponent vertauschen, ohne den Werth der Function zu ändern (sog. Commutationsgesetz, wodurch sich die Operation dritter Ordnung von den niederen unterscheidet). Nun kann man die Einführung einer Algebra verlangen, von welcher die thatsächlich durch die räumliche und logische Natur unserer Bewusstseinsthätigkeit gegebene nur einen Specialfall bildet, und bei welcher auch für das Potenziren und die höheren Operationen vierter und weiterer Ordnung das Commutationsgesetz gilt.

Ebenso könnte man sagen: In der gewöhnlichen Arithmetik ist

$$\sum_{s=o}^{s=p-2}(n^s)$$

ohne Rest theilbar durch p, wenn p eine absolute Prim ist. Nun verlangen wir, dass man diese unvollkommene Arithmetik als speciellen Fall einer umfassenderen, höheren unterordnet, in der das obige

Gesetz nicht nur für Primzahlen, sondern für alle ungeraden Zahlen gilt.

Auch aus folgendem Grunde ist die Analogie zwischen Dimensionen und Potenzen eine ungenügende und schiefe: Man kann die Multiplication aus der Addition, die Potenzirung aus der Multiplication ableiten, d. h. die Operation höherer Ordnung als eine Wiederholung der Operationen niederer Ordnung darstellen Man kann aber nicht die Ebene aus der linearen Ausdehnung, den Raum aus der Ebene ableiten, ohne jedes Mal ein ganz neues, räumliches Moment einzuführen. Durch arithmetische Operationen mit linearen Größen erhält man immer wieder lineare, durch rechnerische Operationen mit Flächengrößen immer wieder Flächengrößen. Es ist zwar ganz richtig, dass ein Rechteck, das 20 m lang und 5 m breit ist, 20×5 Quadratmeter, d. h. quadratische Flächen von 1 m Seitenlänge enthält. Wenn man die Maßzahlen der linearen Seitengrößen multiplicirt, so erhält man die Maßzahl der Fläche auf die Flächeneinheit (die als Seitenmaß die Linieneinheit hat) bezogen. Es hat aber noch niemand bewiesen, dass die lineare Maßeinheit, mit sich selbst multiplicirt, die Einheit des Flächenmaßes ergibt. Es besteht eine Coincidenz der zweiten und dritten Potenz mit den Maßfactoren von Ebene und Körper, nicht aber mit Ebene und Körper selbst.

Mit welchen wunderbaren, mathematischen Eigenschaften man übrigens die geometrischen Gebilde der höheren Dimension begaben muss, möge aus dem folgenden Beispiel geschlossen werden, welches nicht über die vierte Dimension hinausgeht: Wenn a^1 eine Linie, a^2 ein Quadrat von der Seitenlänge a und a^3 einen Würfel repräsentirt, so bedeutet a^4 einen 4-dimensionalen Körper. Wie ein Quadrat von 4 Seiten, ein Würfel von 6 quadratischen Flächen begrenzt wird, so wird dieses 4-dimensionale Raumgebilde von 8 Würfeln begrenzt. Seine Ecken und Kanten werden nicht von Flächen sondern von Körpern, jenen begrenzenden Würfeln, gebildet; so hat es z. B. 16 vierdimensionale Ecken u. s. w.[1]).

In allen diesen Speculationen über nicht-euklidische Geometrie, höhere Dimensionen, Räume höherer Ordnung, hat man meines Er-

1) Hermann Schubert in: The Monist III, p. 433 f.

achtens zwei außerordentlich folgenschwere Irrthümer begangen: Man hat sich einerseits nicht vergewissert, ob der Begriff der Dimension, nach der ausdrücklich gegebenen oder stillschweigend acceptirten Definition, überhaupt eine eindeutige und widerspruchslose Anwendung auf den Raum und räumliche Verhältnisse zulässt; und man hat anderseits die herkömmliche Dreizahl der Dimensionen des gegegebenen Raumes kritiklos als etwas Selbstverständliches, in der Natur des Raumes liegendes angenommen, das über jeden Zweifel erhaben ist und keiner Untersuchung bedarf. Hier muss die Correctur einsetzen. Es muss zunächst festgestellt werden, welche Definitionen des Begriffs der Dimension möglich und zulässig sind und ob eine derselben die Anwendung dieses Begriffes auf andere Räume als den gegebenen gestattet. Es muss sodann zweitens untersucht werden, ob die allgemein angenommene 3-Dimensionalität des Raumes unserer Anschauung wirklich den Charakter einer Thatsache oder gar einer Denknothwendigkeit besitzt. Der Behandlung dieser Probleme ist der folgende Abschnitt gewidmet.

Zweiter Theil.

Kritik der Lehre von den Dimensionen.

V. Definition des Dimensionsbegriffes.

Diejenigen, die den Raum als speciellen Fall einer Mannigfaltigkeit höherer Ordnung ansehen, definiren eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit als eine solche, in welcher die Beziehungen eines Elementes zu allen andern Elementen und zur Gesammtheit des Systems durch einen Ausdruck mit n von einander unabhängigen Variabeln eindeutig bestimmt ist[1]). Der Dimensionsbegriff, so definirt, hat mit dem Raume wenig oder nichts zu thun. Allerdings kann man die herkömmlichen drei Dimensionen des Raumes oder die Cartesianischen Coordinaten nun auch als eine solche dreifache Mannigfaltigkeit betrachten. Das gibt aber Niemand ein Recht alles, was unter

1) Whitehead, A Treatise on Universal Algebra, p. 17.

diesen neuen Dimensionsbegriff, der vom Raum unabhängig ein Erzeugniss der Größenlehre bildet, jederzeit wieder auf Räumliches anzuwenden. Die n-dimensionale Mannigfaltigkeit ist, so lange die Dimensionen nicht im Anschluss an eine wirklich vorhandene qualitative Mannigfaltigkeit interpretirt werden können, weiter nichts als ein reines (also 1-dimensionales) Größengebilde mit n-Variabeln.

Daher wird man auch analytisch mit diesem Dimensionsbegriff nicht mehr leisten können, als mit dem bisherigen Begriffe der Variabeln. Ob ich von einer n-dimensionalen Mannigfaltigkeit oder von einer Mannigfaltigkeit von n-facher Variabilität spreche, ist nur eine Frage des Ausdrucks. Es kann nach obiger Definition ein Ausdruck, der analytisch 3-dimensional ist, etwas räumlich 2-dimensionales bezeichnen und umgekehrt. Wenn man Curven nur vom Standpunkt des Längenmaßes betrachtet (wie das mit den geodätischen Linien von Kegel- und Cylindermantel gethan werden muss, wenn man diese Flächen zu denen vom Krümmungsmaß 0 rechnen will), so sind sie 1-dimensional, obgleich geometrisch jede Krümmung einer Linie die zweite Dimension voraussetzt. Anderseits kann das, was im Raume geradlinig ist, analytisch unter Anwendung der obigen Definition betrachtet, mehr-dimensional sein. Zwei sich gerade auf einander zu bewegende Massen ertheilen sich gegenseitig gewisse Beschleunigungen. Wenn ich die Gleichung für die Entfernung beider Massen in irgend einem Zeitpunkt aufstelle, so erscheinen die beiden Beschleunigungen darin als unabhängige Variabele. Obgleich die Bewegung räumlich, weil geradlinig, 1-dimensional ist, so muss sie doch analytisch durch eine Mannigfaltigkeit von 2 Dimensionen ausgedrückt werden. Jede ungleichförmig beschleunigte, geradlinige Bewegung ist nach obiger Definition »mehr-dimensional«. Hier gerathen also der analytische Dimensionsbegriff und der räumliche in directen und unlösbaren Widerspruch zu einander.

Nun sagen die Mathematiker: Wir meinen auch gar nicht immer etwas Räumliches, wenn wir von Dimensionen sprechen. Dann muss man aber fragen: Warum gebraucht ihr denn diesen Ausdruck mit allgemein anerkannter, räumlicher Bedeutung? Warum redet ihr nicht einfach von Variabelen? Hierbei geht es eben wie überall, wo man einem Worte mit geläufiger Bedeutung einen neuen Sinn unterzuschieben für nützlich hält. Man mag noch so sehr versichern, der

neue Gebrauch habe mit dem alten gar nichts gemein, man habe nur das Wort gewählt, weil das Kind doch einmal einen Namen haben muss; ein wenig später oder ein paar Seiten weiter unten im Buche wird die alte Bedeutung, bewusst oder unbewusst, doch ganz leise wieder eingeschmuggelt.

Man hat daher statt der »Räume« höherer Ordnung die Ausdrücke »Raumoide«[1]) und »Ordnungssysteme« und statt »Dimension« »Scala« vorgeschlagen. Aber selbst dies erscheint überflüssig, da die Bezeichnungen Mannigfaltigkeit und Variabilität vollständig ausreichend sind. Benno Erdmann[2]) ist der Ansicht, dass sich durch die gebräuchlichen Bezeichnungen (Raum von n Dimensionen u. s. w.) »nicht wenige grobe und feine Missverständnisse, besonders bei den philosophischen Beurtheilern, gebildet haben.« Und zwar sollen die fraglichen Bezeichnungen bei den Philosophen nicht sowohl die Ursache, sondern den »willkommenen Anlass« für die Missverständnisse bilden. Da, scheint mir, hat der Philosoph Erdmann seine Berufsgenossen doch gar ungerecht mitgenommen. Die Philosophen haben sich bis jetzt darauf beschränkt, unlogische und widerspruchsvolle Begriffe gebührend zurückzuweisen, während die besagten Missverständnisse im mathematischen Lager selbst entstanden sind, wo man über Bedeutung und Tragweite der metageometrischen Speculationsproducte durchaus nicht einig ist. Was kann die Philosophie dafür, dass der eine Mathematiker, Cayley, die Anwendung der nichteuklidischen Geometrie auf außerempirische »Räume« als von vornherein verfehlt verwirft, während der andere, Helmholtz, mit einer Zuversicht von nicht-euklidischen und krummen Räumen spricht, als könne er sie jeder Zeit mit dem Zollstab ausmessen. Wenn sich, wie Erdmann[3]) glaubt, »die Begriffe jener Räume mit all' jener Klarheit und Deutlichkeit bilden lassen, welche die discursive Natur der begrifflichen Erkenntniss überhaupt zulässt«, so muss es doch auch den Mathematikern ein Kleines sein, diese Begriffe widerspruchslos mit Klarheit und Deutlichkeit und in unzweideutigen Ausdrücken zu definiren und zwar so, dass der gesunde Menschenver-

---

1) Lotze, Metaphysik, S. 241.
2) Die Axiome der Geometrie, S. 49.
3) A. a. O., S. 135.

stand, der ja die übrige Mathematik doch auch acceptirt hat, keinen Anstoß findet. Dass es aber zu solchen Missverständnissen zwischen Mathematik und Philosophie, zu solchen Widersprüchen innerhalb der mathematischen Begriffssphäre überhaupt kommen konnte, daran trägt nicht zum mindesten der Umstand schuld, dass die Mathematiker, anstatt der alten pädagogischen Regel eingedenk zu bleiben, wonach man eine Sache um so besser kennt, von je zahlreicheren und verschiedeneren Standpunkten man sie betrachtet hat, gar zu geneigt sind, unter Vernachlässigung der Anschaulichkeit alles auf eine einzige, ganz einseitige Darstellungsweise, das analytische Verfahren, zu reduciren. Man kann sich in dieser Hinsicht der scharfen aber treffenden Kritik nur anschließen, die Schmitz-Dumont der einseitigen und unklaren, analytischen Symbolik zu Theil werden lässt[1]).

Wir sehen somit: Der analytische Dimensionsbegriff lässt sich nur in gewissen Fällen — und auch dann nur in einer willkürlichen, nicht in der Natur der Sache begründeten Weise — auf den Raum anwenden und geräth nicht selten mit dem räumlichen Dimensionsbegriff in directen Widerspruch. Uebrigens werden wir weiter unten sehen, dass sich die räumlichen Dimensionen nur dann dem analytischen Begriffe der n-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit einordnen lassen, wenn man sie als vertauschbare Coordinaten auffasst, wobei die Zahl derselben willkürlich wird. Die Geometrie des n-fach ausgedehnten Raumes repräsentirt daher keineswegs jene höchste und absolute Geometrie, von der Kant einmal träumte, sondern sie ist lediglich ein ungenauer und unpassender Ausdruck für eine Größenlehre der n-fachen Mannigfaltigkeiten.

Eine zweite Möglichkeit den Begriff der Dimension zu definiren ist durch die Thatsache nahegelegt, dass räumliche Dimensionen und Potenzen sich in einem gewissen Grade entsprechen. Eindimensionale Gebilde, d. i. gerade Linien können bei geradlinigen Coordinaten stets durch eine Gleichung ersten Grades dargestellt werden. Gekrümmte, also die zweite Dimension voraussetzende Curven bedürfen einer Gleichung mindestens zweiten Grades. Damit aber hört die Analogie auch schon auf; denn es gibt auch Curven dritten, vierten

1) Schmitz-Dumont, Naturphilosophie und exacte Wissenschaft, S. 148 ff.

und höheren Grades in der Ebene, also im Zweidimensionalen. Auch schon aus dem Grunde ist die Beziehung zwischen Potenzen und Dimensionen eine ziemlich lose, weil sie geradlinige Coordinaten voraussetzt. Bei Polarcoordinaten stellt sich die Sache anders dar. Wir werden aber weiter unten sehen, dass die Cartesianischen Raumcoordinaten gerade wegen ihrer Vertauschbarkeit nicht geeignet sind die räumlichen Dimensionen zu repräsentiren.

Ein Dimensionsbegriff, der sich weit besser mit wirklichen Eigenschaften der räumlichen Anschauung deckt, ergibt sich aus der Betrachtung der Raumgebilde im Verhältniss zu ihren Grenzen. Schreiben wir einem nach allen möglichen Richtungen im Raume ausgedehnten Raumtheile n Dimensionen zu, so können wir übereinkommen, das Raumgebilde, das die Grenzen eines solchen allseitig ausgedehnten Raumtheiles bildet, als ein solches von $n-1$ Dimensionen zu bezeichnen. Das ist aber nur zulässig unter der ausdrücklichen Bedingung, dass wir unter Dimension nicht etwa Richtungen verstehen. Denn bei dem Uebergang von n zu $n-1$ Dimensionen geben wir nicht eine, sondern viele Richtungen preis. Ebenso können wir dann die Grenze des $n-1$-dimensionalen Gebildes $n-2$-dimensional nennen u. s. w. Bezieht man diesen Dimensionsbegriff auf alle in Frage kommenden Möglichkeiten hinsichtlich der Raumgebilde (Körper, Flächen, Linien, Punkte), so sind 4 Dimensionen anzunehmen; beschränkt man ihn dagegen entweder auf die begrenzten (Körper, Fläche, Linie) oder auf die begrenzenden Gebilde (Fläche, Linie, Punkt), so haben wir drei Dimensionen. Dabei ist es gleichgültig, ob man die Dimensionen bei dem unbestimmtesten Raumgebilde, dem allseitig ausgedehnten, unbegrenzten (d. i. unendlichen) und daher unbeweglichen (weil die Bewegung selbst erst möglich machenden) Raume oder bei dem bestimmtesten, dem Punkt, zu zählen anfängt. Bei begrenzten Körpern und Flächen beruht die größere Bestimmtheit eben darauf, dass sie durch die bestimmteren Gebilde begrenzt sind.

Von allen Dimensionsbegriffen ist dieser auf die möglichen Formen der Raumgrenzen basirte der berechtigtste, da er der einzige ist, der seine Begründung in der Natur der räumlichen Anschauung findet. Er lässt sich aber rechnerisch nicht wohl verwerthen, da die Dimensionen hier qualitativ verschiedene Dinge sind und mehr eine Ordnung, als eine Anzahl darstellen. Man spricht in diesem Sinne von

einem 3-dimensionalen Gebilde, weil dasselbe in die dritte Gruppe der so geordneten Raumgebilde gehört. Aber man kann in dem 3-dimensionalen Gebilde nicht etwa die einzelnen Dimensionen als Richtungen oder irgend sonst etwas aufzeigen. Man kann aus der linearen Größe, ohne etwas ganz neues hinzuzufügen, nicht Flächengrößen ableiten, und aus den letzteren nicht Körper construiren, ohne dabei Begriffe einzuführen, wie beispielsweise die Bewegung, die den voll ausgedehnten Raum schon voraussetzen. Ebenso kann man von Körpern auf Flächen nur dadurch kommen, dass man von etwas, was den Körpern als wesentlich und charakteristisch zukommt, abstrahirt. Darum ist es aber auch nicht gestattet, diese auf die Grenzverhältnisse des Raumes bezugnehmende Betrachtungsweise in umgekehrter Richtung jenseits des gegebenen Raumes fortzusetzen. Der allseitig ausgedehnte Raum ist die erste und Hauptbedingung für die Möglichkeit solcher Grenzbeziehungen, kann also selber nie Grenze sein. Nun wird man einwenden, die Ebene sei ja auch die Bedingung der linearen Grenzbeziehung und doch selbst Grenze der 3-dimensionalen Gebilde. Das ist aber nicht richtig. Denn erstlich ist nicht die für sich existirende Ebene, sondern nur die im allseitig ausgedehnten Raume gedachte Ebene — eine andere gibt es nicht — in Anschlag zu bringen; und zweitens ist gar nicht die Ebene als solche, sondern die Fläche die Vorbedingung linearer Begrenzung. Die Fläche aber kann gekrümmt sein und setzt daher in allen Fällen den allseitig ausgedehnten Raum voraus.

Dazu kommt, dass diese Dimensionen mit dem, was man gewöhnlich Dimension nennt, nur lose zusammenhängen. Denn nach dem geläufigen Gebrauch dieses Wortes ist nur die Gerade 1-dimensional, nur die ebene Fläche 2-dimensional. Gekrümmte Flächen, Curven, können nur als 2- resp. 1-dimensional betrachtet werden, wenn man sie lediglich mit Rücksicht auf das Größenmaß betrachtet und ihre Krümmung vernachlässigt. Es sind daher diese Dimensionen, die wir der Einfachheit halber als Grenzdimensionen bezeichnen wollen, im Grunde genommen nur Allgemeinbegriffe für mögliche Gebilde im allseitig ausgedehnten Raum. Sie sind qualitativ verschieden und nicht coordinirt, daher auch nicht vertauschbar, wie Erdmann meint. Nach Erdmann soll ja gerade die Vertauschbarkeit der Dimensionen den Unterschied zwischen dem Raume und anderen 3-dimensionalen Mannigfaltigkeiten (Farben,

Töne) ausmachen. Man kann daher diese Dimensionen nie und nimmer zu einem festen, oder für einen bestimmten Fall als fest angenommenen, Gerüst für die messende Raumbetrachtung zu einem Coordinatensystem machen. Sie sind vor allem eben keine Richtungen im Raum.

Man wird geneigt sein, einzuwenden, dass ich bei dieser Betrachtungsweise die Wichtigkeit des Lothes außer Acht lasse. Man gelangt, so wird man sagen, in der Richtung der Normalen auf einer Fläche oder Curve in die nächsthöhere Dimension; und man kann somit der Normalen geradezu die Rolle ertheilen, diese Dimension zu repräsentiren. Dies ist aber nicht richtig, denn die Wahl der Normalen, einerlei welche Vortheile sie auch in anderer Hinsicht bieten mag, ist hierbei ganz willkürlich, da jede andere gerade oder krumme Linie dasselbe leistet. Es gibt in jedem Punkte einer Curve oder Fläche unendlich viele Richtungen, in welchen man den Uebergang zur nächsthöheren Dimension vollziehen kann. Ueberdies sind die Normalen auf Curven und krummen Flächen nicht parallel und es wäre somit für jeden Punkt der letzteren eine andere Richtung die nächsthöhere Dimension.

Auch Riemann's Definition der Dimension gehört eigentlich hierher, obgleich er bei der Anwendung des Dimensionsbegriffes das qualitativ Verschiedene nachher nicht mitspielen lässt. Wenn eine n-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit auf bestimmte Art in eine andere, völlig verschiedene übergeht, so haben wir eine $n + 1$- oder $n - 1$-fach ausgedehnte Mannigfaltigkeit. Gerade die »bestimmte Art« des Uebergangs und die »völlige Verschiedenheit« sollten aber den Mathematiker verhindern, die Dimensionen als reine Quantitäten, Coordinaten zu behandeln. Uebrigens verkennt Riemann den Grenzcharakter der Dimensionen nicht, denn jedes $n - 1$-dimensionale Gebilde trennt nach ihm das n-dimensionale in zwei völlig geschiedene Theile. Aber gerade solche Bestimmungen machen den Dimensionsbegriff einerseits ganz unfähig, auf etwas anderes als den gegebenen Raum angewendet zu werden, und bewirken anderseits, dass man zwar von Gebilden von 1, 2, 3 Dimensionen sprechen kann, dass man aber nirgends das Ding vorzeigen kann, welches Dimension heißt. Deshalb geräth man bei dem Riemann'schen Dimensionsbegriff auch sofort in Widersprüche,

wenn man ihn auf andere Mannigfaltigkeiten, etwa auf die der Farben oder Töne, anwenden will.

Während die beiden ersten der gegebenen Definitionen der Dimension rein analytisch waren und kein Recht beanspruchen können auf den Raum bezogen zu werden, ist die vorliegende, auf die Raumgrenzen bezugnehmende durchaus geometrisch. Dasselbe ist der Fall mit der gewöhnlichen und gebräuchlichsten Definition, wonach die Dimensionen Richtungen, und zwar Grundrichtungen im Raume sind. Diese Definition ist Jedermann geläufig. Sie wird uns gewissermaßen schon in dem Anschauungsunterricht der ersten Schuljahre eingeimpft, wenn wir lernen, dass jeder Körper eine Länge, Breite und Dicke (auch manchmal Höhe oder Tiefe genannt) habe. Wir machen aber gar keinen Gebrauch von dem Dimensionsbegriff, bis wir uns mit der Anwendung der Mathematik auf praktische Probleme zu beschäftigen haben und dann auf jene Definition unsere ganze analytische Geometrie aufbauen. Wenigstens halten wir sie für die unerschütterliche und unumgängliche Grundlage derselben. Wir machen es noch heute wie Descartes, der, wie Sigwart sich ausdrückt, mit dem Begriffe der extensio in longum, latum et profundum arbeitet, als ob derselbe keiner weiteren Analyse bedürfe[1]. Es bleibt nun zu untersuchen, ob dieser so geläufigen Betrachtungsweise wirklich eine solche grundlegende Bedeutung zukommt. Gibt es in der That Richtungen im Raume, oder Richtungsverhältnisse, die eine derartige Bevorzugung, eine solche Ausnahmestellung als maßgebende Factoren der Raumanschauung und Raummessung gerechtfertigt erscheinen lassen? Da diese Frage nach der Berechtigung der Annahme absoluter oder relativer Grundrichtungen im Raume in engster Beziehung zu derjenigen nach der Anzahl dieser Grundrichtungen oder Dimensionen steht, so dürfte es sich empfehlen, beide Probleme gemeinsam und im Zusammenhange zu behandeln, welchem Zwecke die Betrachtungen des folgenden Capitels dienen mögen.

VI. Die Zahl der Dimensionen.

»Der gegebene Raum hat drei Dimensionen«: Das ist der Satz, den Jedermann als selbstverständlich hinzunehmen gewohnt ist und den

1) Sigwart, Logik II, S. 63.

die Mathematiker und Philosophen fast ohne Ausnahme zu dem Range eines apriorischen Axioms, oder, sofern sie als waschechte Empiriker alles Apriorische und Axiomatische perhorresciren, wenigstens zu dem eines »nothwendigen« oder unvermeidlichen »Postulates« erhoben haben[1]). Nach Grassmann ist die Raumlehre, die einen speciellen Fall der allgemeinen Ausdehnungslehre bildet, an die drei Dimensionen des Raumes gebunden, während die abstracte Ausdehnungslehre von diesen Schranken freibleibt[2]). Grassmann's abstracte Ausdehnungslehre ist aber keineswegs die weiter oben von uns geforderte, gänzlich von der Größenlehre befreite. Uebrigens erklärt Grassmann, dass es nicht möglich sei die Nothwendigkeit der drei Dimensionen aus den Gesetzen des Denkens abzuleiten.

Nach Riemann ist es eine Voraussetzung, welche bei jeder Auffassung der Außenwelt angewandt wird, dass der Raum eine unbegrenzte, dreifach ausgedehnte Mannigfaltigkeit sei. Wir gelangen bei dem gegebenen Raum durch dreimaligen Uebergang vom begrenzten zum begrenzenden Raumgebilde zum nicht weiter zerlegbaren Raumelement, dem Punkt. Auch für Helmholtz ist die dreifache Ausdehnung des gegebenen Raumes eine erste Voraussetzung, und Erdmann definirt den Raum als eine »stetige Größe,

---

1) Mit dieser beliebt gewordenen Ausdrucksweise drückt man sich sachte um die Anerkennung des wesentlichen Unterschieds zwischen der Gewissheit des thatsächlichen Erfahrungsinhaltes und derjenigen der mathematischan Axiome und ihrer widerspruchslosen Derivate herum, eines Unterschieds, den der moderne Empiriker zwar fortwährend in seinen eigenen Darstellungen benutzt, den er aber principiell nie zugestehen darf. Ich habe nie einsehen gelernt, wie man zu nothwendigen, allgemeingültigen Theorien und Postulaten gelangen kann, ohne von nothwendigen Axiomen auszugehen; es sei denn, dass es mit der Nothwendigkeit der Postulate und Theorien nicht weit her ist. J. Schultz (S. 126) fasst die Entstehung dieser axiomatischen Postulate sogar in ganz darwinistischer Weise auf: sie haben sich aus dem Denken niederer Lebensformen (Thiere), die noch nicht axiomatisch dachten, nach und nach entwickelt. Da muss man sich aber doch wundern, dass diese Entwicklung qualitativ so ganz gleichartig, d. h. ohne jede Variation der Arten verlief, so dass die so »entwickelten« Axiome allgemeine Gültigkeit erlangten und behalten, anstatt wie die physische bei den Thieren hier scharfe Zähne, dort flinke Beine und bei andern stattliche Hörner hervorzubringen. Aber vielleicht bin ich im Irrthum mit diesem Argument. Vielleicht ist die Metageometrie in diesem Sinne als Merkmal einer neuen Varietät aufzufassen, hinter welcher die »Euklidischen« in atavistischer Beschränktheit zurückbleiben müssen.

2) Grassmann, Ausdehnungslehre, Anhang III, 1877 (S. 297 der engl. Ausg.).

deren Elemente durch drei unabhängige Variabele eindeutig bestimmt sind.« Als erstes Axiom der euklidischen Geometrie gilt ihm der Satz: Der Raum ist eine dreifach ausgedehnte (in sich congruente, ebene) Mannigfaltigkeit.

Bei neueren Schriftstellern findet sich hier und da eine Tendenz, die Dreidimensionalität nicht als letzten elementaren Grundsatz aufzufassen, sondern ihn in Bestandtheile zu zerlegen. So besteht dieselbe nach Russel[1]) aus einem apriorischen und einem empirischen Theil. Der apriorische besagt, dass der Raum eine endliche ganze Zahl von Dimensionen haben müsse; der empirische, dass wir thatsächlich finden, dass es drei sind. Dabei sei die Gewissheit der Dreizahl der Dimensionen fast so groß wie die des apriorischen Elementes.

Die empirische Dreidimensionalität des Raumes ist vielfach physiopsychologisch zu begründen gesucht worden. Man sucht sie auf drei verschiedene Empfindungsreihen des Bewegungssinnes (Innervations- oder Muskelempfindungen), auf eine Dreiheit von Richtungsgefühlen (Riehl, Heymans) zurückzuführen; und man bringt sie sogar mit der Dreizahl der Bogengänge des Gehörlabyrinths in Verbindung.

Die Thatsächlichkeit der Dreidimensionalität scheint jedoch meines Wissens von Niemandem bestritten zu werden; und ebenso scheint von Mathematikern wie von Nichtmathematikern als ganz selbstverständlich und keines Beweises bedürftig angenommen zu werden, dass man diese drei Dimensionen als Richtungen im Raume, Grundrichtungen, sog. Coordinaten auffassen dürfe. Beide Annahmen aber scheinen mir sehr die Kritik herauszufordern. Wir werden daher das geläufige Urtheil »Der Raum hat drei Dimensionen, welche sich als drei auf einander senkrechte Richtungen darstellen lassen«, einer eingehenden Prüfung auf seinen wahren Werth unterziehen müssen.

Ein Mensch, der nie etwas von Philosophie gehört und keine Logik gelernt hat, wird zwar weder die Aristotelischen noch die Kantischen Urtheilsformen kennen. Aber wenn er nicht lediglich gedankenlos und kritiklos nachspricht, was er von andern hört, sondern selbst denkt, so wird er doch ausfindig machen, dass es, abgesehen von den falschen, d. h. einen Widerspruch enthaltenden, und

1) The Foundations of Geometrie, p. 161—163.

unwahren, d. h. mit der Wirklichkeit nicht übereinstimmenden, Urtheilen, drei ganz verschiedene Arten von Urtheilen gibt. Er wird diese drei Arten unterscheiden, auch wenn er sie nicht mit besonderen Namen zu belegen gelernt hat. Der Name und die sprachliche Form der Urtheile haben mit dieser Unterscheidung wenig oder nichts zu thun[1]. Ja, derselbe Satz kann für alle drei Urtheilsarten stehen. Der Satz »der Raum hat drei Grundrichtungen (Ausmessungen) oder Dimensionen« kann demnach drei verschiedene Gedanken oder Gedankengänge repräsentiren. Er kann erstlich bedeuten, dass der Raum nothwendiger und unumgänglicher Weise als 3-dimensionaler gedacht werden muss. In diesem Falle läge ein Urtheil von apodictischer Gültigkeit vor, ganz wie etwa bei dem Satze: Die gerade Linie ist der kürzeste Weg zwischen zwei Punkten. Das hieße also: Der Raum hat drei Grundrichtungen, und wir können es uns nicht denken, dass es anders sein könnte.

Der Satz kann aber zweitens auch Folgendes bedeuten: Der Raum hat drei Dimensionen. Es könnte zwar gerade so gut auch anders sein, nämlich dass er mehr oder weniger als drei hätte; aber es ist nun einmal so und nicht anders. Ein solches Urtheil drückt etwas Thatsächliches aus, ganz so, wie wenn ich als ein thatsächliches Erlebniss ausgebe: Ich habe Hunger, ich sehe eine rothe Fläche u. s. w. Ein solches Urtheil ist, obwohl eben so gewiss wie ein apodictisches, nur assertorisch.

Endlich ist noch ein dritter Fall möglich: Das Urtheil von den drei Dimensionen kann ganz conventionell sein; so etwa wie das, welches aussagt, dass das Wasser bei 100° Wärme siedet. Bei apodictischen und assertorischen Urtheilen handelt es sich immer um

---

1) Die Kant'sche Tafel der Urtheilsformen ist gerade deshalb von so geringem Werthe, weil sie der sprachlichen Form der Urtheile zu viel Bedeutung zumisst. Man kann Urtheile, die ihrem Inhalt nach genau übereinstimmen, so abfassen, dass sie nicht in einer einzigen Rubrik der Urtheilstafel Kant's zusammenfallen. Man betrachte die folgenden beiden Sätze: 1) Wenn in einem Dreieck zwei Seiten gleich sind, so sind auch die diesen Seiten gegenüber liegenden Winkel nicht verschieden. 2) Alle Dreiecke, welche zwei gleiche Seiten haben, müssen auch zwei diesen Seiten gegenüberliegende gleiche Winkel aufweisen. Das erste dieser Urtheile ist ein besonderes, verneinend, hypothetisch und assertorisch; das zweite ist allgemein, bejahend, kategorisch und apodictisch. Trotzdem aber bedeuten beide Urtheile genau dasselbe.

etwas, was in der Natur der Sache, die man zum Ausdruck bringen will, begründet ist; bei dem conventionellen Urtheil, obschon es wahr ist, ist dies nicht der Fall. Dass man Temperaturen oberhalb einer gewissen Grenze als Wärme bezeichnet und dass man den Spielraum von jener Grenze bis zu einer gewissen anderen Grenze in 100 Grade eintheilt, beruht auf einem für die gegenseitige Verständigung sehr nützlichen, aber dennoch ganz willkürlichen Uebereinkommen. Anderseits nimmt ein conventionelles Urtheil sofort etwas von dem Charakter des falschen und unwahren Urtheils an, wenn man den Hörer oder Leser in dem Glauben lässt oder ihn darein versetzt, dass es eine Thatsächlichkeit oder Nothwendigkeit ausdrücke.

Von welcher Art ist nun der Satz über die 3-Dimensionalität des Raumes? Wir lernen als Kinder, dass jeder Körper eine Länge, Breite und Dicke (bezw. Höhe, Tiefe) habe, dass man aber diese Grundrichtungen ziemlich beliebig festlegen kann. In einem unregelmäßig geformten Körper oder auch in einem ganz regelmäßig gebildeten, wie die Kugel, bleibt es sich ganz gleich, welche Durchmesser ich als Dimensionen annehme; nur sollen sie normal zu einander stehen. Aber auch bei andern Körpern, wie bei Polyedern, ist die Wahl nur eine durch die Convention sanctionirte. Bei einem Würfel wird man eine Kante als Höhe annehmen. Wenn ich aber eine Würfelecke als dreiseitige Pyramide aus der Erde herausragen lasse, dann wird doch eine andere Linie die Höhe. Es soll also 3 Dimensionen, geben aber man kann sie wählen wie man will; d. h. man kann der ersten eine ganz beliebige Richtung geben, die beiden andern sind dann durch die Bedingung der Rechtwinkligkeit bestimmt.

Genau so verhält sich die Sache bei dem Cartesianischen Coordinatensysteme der analytischen Geometrie. Man nimmt als Coordinatenaxen drei beliebige rechtwinklig sich schneidende Geraden an. Darin aber documentirt sich doch nur die Thatsache, dass man in jedem Punkte im Raum drei auf einander senkrechte Richtungspaare festlegen kann, und zwar auch diese noch in unendlich vielfältiger Weise. Grundrichtungen im Raume sind dadurch nicht gegeben, weder absolute noch relative. Der Punkt, auf welchen ich Nachdruck legen möchte, dürfte vielleicht bei Uebertragung auf ein anderes Gebiet klarer werden. Man denke sich beispielsweise, dass Jemand

behaupte, es gäbe drei und nur drei Grundfarben; dass man dieselben aber in dem eine stetige und in sich zurücklaufende Mannigfaltigkeit bildenden Qualitäten-Bereich der Lichtempfindungen, dem Farbenkreise, beliebig festlegen könne. Das heisst, wenn man eine beliebig bestimme, dann seien die andern gegeben. Nun ist doch auf den ersten Blick klar, dass dies gleichbedeutend wäre mit dem Zugeständniss, dass es überhaupt keine Grundfarben gibt, und dass die Reduction der unendlichen Mannigfaltigkeit von Qualitäten auf drei Grundqualitäten nur eine dem Princip der Oeconomie beim Gedankenaustausch dienende, sonst aber willkürliche Annahme ist. Ganz dasselbe gilt für die coordinirten Dimensionen. Wenn man nicht bei jedem Raumgebilde in bestimmter eindeutiger Weise sagen kann »dies sind die drei Dimensionen«; wenn man sogar zugeben muss, dass man für jeden Punkt des Raumes die drei Grundrichtungen in tausendfach verschiedener Weise festsetzen kann, dann gibt man damit eben zu, dass es überhaupt keine Grundrichtungen gibt.

Wenn es aber keine festen Grundrichtungen gibt, dann kann auch der Dreizahl der relativen, d. h. für einen gegebenen Fall gewählten Coordinaten keine in der Natur des Raumes begründete Ausnahmestellung zukommen, so sehr sich dieselbe ihrer Einfachheit wegen zur analytischen Darstellung empfiehlt. Es verhält sich nicht so, dass wir erst die Intuition oder den Begriff der Dimension haben und hernach gewahr werden, dass der Raum drei derselben besitzt. Im Gegentheil, in dem Raum, wie er als eine Bedingung und gemeinsame Eigenschaft der Erlebnisse in unserem Bewusstsein gegeben ist, finden wir von Anfang an, dass von jedem Punkte aus eine unendliche Anzahl von Richtungen oder geraden Linien möglich sind. In jedem allseitig begrenzten Raumtheil oder materiellen Körper, dem wir in der Wirklichkeit begegnen oder den wir in unserer Einbildung construiren, können wir von jedem Punkt im Innern in einer unendlichen Zahl von Richtungen Geraden ziehen oder gezogen denken, die die Grenze des Körpers, d. i. seine Oberfläche, treffen. Alles, was Ausdehnung besitzt, ist in dieser Weise allseitig ausgedehnt. Wenn wir Linien und Flächen auch ausgedehnt nennen, so wollen wir damit nicht sagen, dass diese Producte der Abstraction für sich allein in der Anschauung existiren könnten; wir können sie uns stets nur im allseitig ausgedehnten

Raume als Grenzen von Raumtheilen vorstellen. Dabei ist zu beachten, dass auch in der Ebene in jedem Punkte unendlich viele, in der Geraden aber nur zwei Richtungen möglich sind. Dies entspricht ganz genau der eigenthümlichen Thatsache, die wir überall wiederfinden, wo es sich um die qualitative Differenzirung von Mannigfaltigkeiten handelt. Es gibt in einer Mannigfaltigkeit entweder eine Qualität (d. h. also gar keine Qualitätsunterschiede) oder zwei Qualitäten (antagonistisches oder bipolares System) oder drittens unendlich viele Qualitäten (geschlossene Mannigfaltigkeit). Als Beispiel der ersten Art erwähne ich die Reihe der farblosen Lichtempfindungen oder das System der Lichtempfindungen der total Farbenblinden (Achromaten); als Beispiele der zweiten Art können die Temperatur-Empfindungen und die Farbensysteme der Dichromaten (die unter sich wieder sehr verschieden sein mögen) gelten. Zu der dritten Gruppe gehören das System der Farbenqualitäten der Polychromaten (die Helmholtz Trichromaten nannte), die Mannigfaltigkeiten der Geschmacks- und Geruchsqualitäten, die der Klangfarbe sowie die der Vocale der menschlichen Sprache. Physiologen und Psychologen haben zwar immer wieder und wieder versucht, diese stetigen, in sich abgeschlossenen Mannigfaltigkeiten in Systeme mit beschränkter Zahl von Grundempfindungen zu zwängen; aber in keiner dieser Mannigfaltigkeiten hat man die Grundqualitäten in unanfechtbarer Weise vorzuführen vermocht. Dem ganzen Bestreben der Componententheorien liegt ein doppelter Denkfehler zu Grunde. Einmal glaubt man, das Princip der Einfachheit, welches hinsichtlich der wissenschaftlichen Darstellung in Worten und Symbolen berechtigt und geboten ist, auch auf die Thatsachen selbst übertragen zu müssen. Während man sonst überall gerne zugibt, dass die Natur keine Sprünge macht, will man bei den Sinnesqualitäten von stetigen Uebergängen nichts wissen. Weil das für unsere schematische Darstellung ein wenig verwickelt wird, darum soll es auch für die Natur zu complicirt sein. Genau wie bei den Sinnesqualitäten, so glaubt man nun auch der stetigen Mannigfaltigkeit der Raumqualitäten (Richtungen) ein System von Grundqualitäten, die Dimensionen, unterschieben zu müssen.

Zweitens begehen die Componententheorien den Irrthum, dass sie die Zweitheilung im »eindimensionalen« (bipolaren) System und die

Zurückführung höherer Mannigfaltigkeiten auf eine beschränkte Anzahl von Elementen als analoge, coordinirte und gleichberechtigte Methoden betrachten. Dies ist aber, wie ich schon an anderer Stelle speciell für die Grundfarbentheorien dargethan habe [1]), ganz ungerechtfertigt. In einem antagonistischen oder bipolaren System ist die Zweiheit der Componenten nicht nur der für die Einfachheit der Darstellung günstigste, sondern überhaupt der einzig mögliche Fall. Nicht so bei höheren Mannigfaltigkeiten. Hier ist zwar die Zurückführung auf drei Grundqualitäten immer noch der für die Darstellung einfachste Fall, aber durchaus nicht der einzig mögliche, sondern nur ein aus vielen möglichen willkürlich (wenn auch vielleicht sehr brauchbar) gewählter.

Die Verschiedenheit der Richtungen im Raume ist eine qualitative, wenn sich auch die Messung auf Winkelgrößen anwenden lässt. Auch hier liegen bezüglich der Zahl der Qualitäten (Richtungen) drei Möglichkeiten vor. Es gibt entweder gar keine Richtungen, wie bei dem Punkt, dem Repräsentanten größter räumlicher Bestimmung, oder zwei Richtungen, wie bei den geraden Linien, oder unendlich viele Richtungen, wie bei der Ebene und dem allseitig ausgedehnten Raum. Der letztere repräsentirt, da es in ihm in jedem Punkte unendlich viele Ebenen gibt, von denen jede unendlich viele Richtungen besitzt, eine Unendlichkeit höherer Ordnung.

Von jedem Punkte im Raume gehen unendlich viele Richtungen aus, und keine von diesen Richtungen kann ein besonderes Recht beanspruchen, als Grundrichtung oder Dimension betrachtet zu werden. Ebenso wenig kann aber ein bestimmtes Richtungs v e r h ä l t n i s s eine bevorrechtete Stellung beanspruchen. Im orthogonalen cartesianischen Coordinatensystem ist dem Loth und damit dem Raumwinkel von der Größe $\frac{1}{2}\pi$ eine solche Ausnahmestellung gegeben, und man hat sich durch die analytische Geometrie an die Wahl des rechtwinkligen Coordinatensystems so gewöhnt, dass sie fast als selbstverständlich, als in der Natur des Raumes begründet erscheint. Es soll gewiss nicht geleugnet werden, dass das dreiaxige, rechtwinklige Coordinatensystem sich bei der analytischen Darstellung außerordentlich nützlich erweist. Aber es ist durchaus nicht das einzige, das möglich ist, wenn es

1) Beiträge zur Kenntniss der Farbenblindheit. Philos. Studien VIII, S. 181.

auch von allen möglichen das brauchbarste sein mag. Es sind andere Systeme möglich, die sich ebenso gut als Skelett, als Gerüst für unsere analytischen Raumbetrachtungen benutzen ließen. Ich will hier nur eins erwähnen. Wenn man von dem Mittelpunkt eines regulären Tetraeders Geraden durch die Eckpunkte legt, so steht jede dieser vier Geraden zu den drei andern in gleichen Raum-(Winkel-) Beziehungen. Denkt man sich diese Linien als Coordinatenaxen, so theilen sie den ganzen Raum in vier gleiche Raumwinkel von dem Werthe π. Trotzdem hier vier sich treffende, nicht sich schneidende Coordinatenaxen vorhanden wären, so wäre doch jeder Punkt im Raum durch drei Coordinaten eindeutig bestimmt, und zwar als gemeinsamer Punkt dreier überall sich unter gleichen Winkeln schneidenden Ebenen. Es sind jedoch stets vier Bestimmungen vorhanden, da der jeweilige Fortfall einer der vier Coordinaten anzeigt, in welchem der vier Raumwinkel der betreffende Punkt sich befindet. Es ist klar, dass ein solches Coordinatensystem viele der Bequemlichkeiten (z. B. hinsichtlich der Verschiebung des Anfangspunktes) entbehren würde, die dem rechtwinkligen eigen sind; aber es hätte auch anderseits seine Vortheile aufzuweisen. So ist es beispielsweise bei diesem Systeme nicht nothwendig, positive und negative Richtungen anzunehmen, wie bei den orthogonalen und schiefwinkligen cartesianischen. Man pflegt gewöhnlich zu sagen: Zur eindeutigen Feststellung eines Punktes sind drei Bestimmungsstücke nothwendig; oder: Ein Punkt ist bestimmt durch die Angabe seiner Distanzen von drei gegebenen Punkten, Linien oder Ebenen. Oder: Jeder Punkt im Raum wird durch drei unabhängig veränderliche Coordinaten vollständig bestimmt[1]). Das ist aber nur richtig, wenn man vorher die willkürliche Entscheidung getroffen hat, welche Richtungen positiv und welche negativ zu rechnen sind. Diesen positiven und negativen Richtungen aber entspricht nichts im Raume. Nur wenn die Maßzahlen mit Vorzeichen behaftet sind, ist durch drei Coordinaten ein Punkt bestimmt. Fehlen die Vorzeichen, so hat man bei drei Bestimmungsstücken die Wahl zwischen 8 Punkten, je einen in jedem Octanten.

---

1) Heymans, Die Gesetze und Elemente des wissenschaftlichen Denkens, S. 188.

Die Lage eines Punktes ist eindeutig bestimmt, wenn seine Entfernung von mindestens vier nicht in einer Ebene gelegenen Punkten von bekannter Lage gegeben ist. Es sind stets vier Bestimmungsstücke erforderlich; aber sie müssen nicht nothwendig in Form von Distanzen oder Linearcoordinaten gegeben sein. Bei den geradlinigen dreiaxigen Coordinatensystemen ist die vierte Bestimmung in der Wahl der Vorzeichen, bei Polar-Coordinaten in der Angabe der Richtung, in welcher die Winkel-Coordinaten zu rechnen sind, versteckt. Bei dem oben erwähnten vieraxigen Systeme besteht das vierte Bestimmungsstück in dem jeweiligen Fortfall einer der vier Coordinaten.

Wenn somit die Nothwendigkeit von mindestens vier Bestimmungsstücken nicht geleugnet werden kann, warum behauptet man dann noch, Dimensionen und Coordinaten durcheinander werfend, der Raum sei dreidimensional? Wenn wir die Dimensionen als Grund- oder Coordinaten-Richtungen definiren, dann ist die Dreizahl ganz und gar conventionell. Man hat diese drei Grundrichtungen gewählt, weil sie besonders bequem sind. Man hätte aber eben so gut eine andere Zahl wählen können. Je nach der Anzahl der gewählten Grundrichtungen könnte man dann dem gegebenen Raum eben so wohl vier, fünf, sechs u. s. w. Dimensionen zuschreiben. Dass die Welt in Bezug auf die Raumanschauung, wie sich Fechner ausdrückt, nur bis drei zählen kann, ist nicht allein keine Eigenschaft der Welt, sondern es ist auch nicht einmal eine unserer subjectiven psychischen Individualität inhärirende Eigenschaft, wie Milau[1]) und mit mit ihm so viele andere meinen. Es ist vielmehr lediglich die Folge einer Convention. Wir finden es in diesem Falle recht bequem bis drei zu zählen, und wir wollen nicht weiter zählen.

Diese conventionell gewählte Dreiheit der »Coordinaten«-Dimensionen hat aber mit den weiter oben erörterten, in den Begrenzungsverhältnissen der Raumgebilde begründeten »Dimensionen«, die man ja eventuell, allerdings ungenau, auch als eine Dreiheit auffassen kann, ebenso wenig zu thun, wie etwa mit der Dreiheit der Aggregatzustände, der logischen Fundamentalgesetze oder der Möglichkeiten

---

1) Aus dem Grenzgebiet zwischen Mathematik und Philosophie, Kiel 1901, S. 26.

bei der Größenvergleichung (gleich, größer und kleiner). Wenn man aber jene auf die Grenzverhältnisse basirten Dimensionen als Dreiheit auffasst, so ist dies, wie wir sagten, ungenau, weil es zwar dreierlei Raumgrenzen, aber, wie wir weiter oben bereits hervorhoben, vier Stufen der Raumbestimmung gibt (allseitige Ausdehnung, Fläche, Linie, Punkt). Auch kann, was mit Bezug auf die Grenzdimensionen ein- oder zweidimensional ist, bei analytischer Darstellung im dreiaxigen Coordinaten-System aller drei Dimensionen (als Grundrichtungen) bedürfen; so im Falle der nicht ebenen Curven und der gekrümmten Flächen, die man nur dann als ein- resp. zweidimensional bezeichnen kann, wenn man von dem Gesichtspunkte der Grenzbestimmung ausgeht. Thatsächlich aber werden bei der anschaulichen Interpretirung der Formeln der analytischen Geometrie die zwei Dimensionsbegriffe fortwährend durcheinandergeworfen, trotzdem nur eine ganz zufällige Correspondenz zwischen ihnen besteht und trotzdem der eine rein conventioneller Art ist, während der andere wesentliche Eigenschaften der Raumgebilde zum Vorwand nimmt. Es muss hier nochmals betont werden, dass die Grenz-Dimensionen weder vertauschbar sind, noch überhaupt durch bestimmte Richtungen oder Richtungsverhältnisse im Raume repräsentirt werden können Man sollte daher auch gar nicht von der Zahl der Dimensionen, sondern von der Ordnung der Raumbestimmungsstufe sprechen. Dabei wird es, wie wir weiter unten sehen werden, der Natur der Raumanschauung am besten entsprechen, wenn man den allseitig ausgedehnten Raum als die erste, Flächen als die zweite, Linien als die dritte und endlich die vollendete Ortsbestimmung im Raume, den Punkt, als die vierte Stufe ansieht.

Will man nun den conventionellen, aus dem rechtwinkligen Coordinatensystem entspringenden Dimensionsbegriff — und dieser ist es, mit dem die Mathematik, da wo sie in controllirbaren, auf den wirklichen Raum anwendbaren Formeln spricht, gewöhnlich operirt — eindeutig definiren, so kann diese Definition nur folgendermaßen ausfallen: Dimensionen heißen die drei aufeinander senkrecht stehenden Doppelrichtungen, die man in jedem Punkte des Raumes (und zwar in unendlich vielfacher Weise) errichten kann. Da aber nicht mehr als drei Linien sich in einem Punkte unter rechten Winkeln schneiden können, so enthält diese Definition, einerlei ob

ausdrücklich oder stillschweigend, die nothwendige Bestimmung, dass es nur drei Dimensionen geben könne[1]). Die Ausdrücke vierte Dimension, Raum von n Dimensionen u. s. w. sind dann wesenlose, eine contradictio in adjecto enthaltende Scheinbegriffe, die in dieselbe Categorie gehören, wie die vierte Dreiecksseite oder das fünfeckige Tetraeder. Sollte aber jemand behaupten, er stelle sich eben einen Raum vor, in welchem 4 oder mehr Lothe in einem Punkte möglich seinen, so hat der Hörer dieser Aussage seinerseits das Recht zu erklären, dass ein solcher Raum zusammengehört mit der Logik, in welcher Indentität gleich Widerspruch st, und mit der Arithmetik, in welcher $2 \times 2 = 5$ und 11 gerade ist.

Gibt man dagegen bei der Definition der Dimension den Charakter derselben als Normale auf, d. h. können die Grundrichtungen, die man zu Coordinatenaxen macht, sich unter anderen als rechten Winkeln schneiden, dann ist der Zahl der Dimensionen allerdings keine Grenze gesetzt; aber es bedarf dann zur Repräsentation der höheren Dimensionen auch keiner außerempirischen oder nichteuklidischen Räume. Der gegebene Raum hat dann eben so viele Dimensionen als man Grundrichtungen annimmt. Acceptirt man die weiter oben besprochenen tetraedrischen Coordinaten, so sind es vier, wählt man die acht Würfel-Diagonalen, die den Raum in sechs vierseitige Pyramiden (ohne Basis natürlich) von dem Winkelwerthe $\frac{2}{3}\pi$ zerlegen, so hat man vier Doppeldimensionen. Ebenso ließen sich die Geraden von dem Mittelpunkte nach den Ecken des regulären Dodekaeders oder Ikosaeders als Grundrichtungen oder Dimensionen verwenden. Uebrigens braucht man nicht bei regulären Coordinaten, d. i. solchen, bei welchen jede Axe zu allen benachbarten gleiche Winkelbeziehungen hat, stehen zu bleiben. Nach Analogie der dreiaxigen schiefen Coordinatensysteme ließen sich schiefe mehraxige Systeme in unbegrenzter Zahl aufstellen. Vor allen diesen Systemen haben das übliche Cartesianische System mit drei Doppelaxen und das tetraedrische vieraxige System nur den Vortheil größerer Einfachheit und daher praktischer Verwendbarkeit voraus, nicht aber

---

1) Kirschmann, The fourth Dimension, Toronto 1896. S. auch Schmitz-Dumont, Naturphilosophie u. s. w. S. 152.

besitzen sie ein besonderes Vorrecht auf die Identificirung ihrer Grundrichtungen mit den Dimensionen des Raumes.

Auf die Entstehung des unklaren Dimensionsbegriffes der heutigen Mathematik hat neben der fortwährenden Confusion der Stufen räumlicher Grenzbestimmung mit Coordinaten oder Grundrichtungen noch ein anderer, uns so zu sagen in Fleisch und Blut übergegangener, folgenschwerer Irrthum bestimmend eingewirkt, nämlich die Vorstellung, dass alle Raumbetrachtung von dem Punkte als Raum-»Element« beginnen müsse[1]), und dass die linearen Größen bei aller Ausdehnung als das Primäre zu betrachten seien.

Der Punkt hat keine Ausdehnung. Bei diesem Satze pflegt man, da das Nicht-Ausgedehnte doch nicht räumlich sein könne, stillschweigend hinzuzudenken, dass also der Punkt etwas Nicht-Räumliches sei. Das muss sogar dem großen Philosophen und Mathematiker passirt sein, der die analytische Geometrie einführte, sonst hätte er wohl nicht schließen können, dass, da die Seele nicht räumlich sei, der influxus physicus nur in einem Punkte des Gehirns stattfinden könne. Hier liegt ein einfacher sprachlich-logischer Schnitzer vor, der sich dem ungenauen Ausdruck »unräumlich« an die Ferse heftet. Das Räumliche ist ein weiterer Begriff als das Ausgedehnte. Auch die Raumgrenzen, Raumbeziehungen u. s. w. sind räumlich, nicht nur der Raum selbst und seine Theile. In der That, der Punkt ist keineswegs etwas Unräumliches. Er ist im Gegentheil so zu sagen von allem Räumlichen das Räumlichste, denn er ist das Product der vollendeten Raumbestimmung. Aber dabei ist er doch kein Theil des Raumes, also auch kein Raumelement. Der Raum besteht nicht aus Punkten, sondern, da er homogen, congruent ist, aus Räumen. Jeder noch so kleine Theil des Raumes ist wieder ein allseitig ausgedehnter Raum. Die Widersprüche, die sich einstellten, wenn man den Punkt als Raum-Element ansah, haben denn auch die Mathematiker zur Einführung solcher Pseudobegriffe wie Linienelement, Flächenelement, Punktmenge u. s. w. bewogen, mit welchen man wenigstens sprachlich um die Schwierigkeiten herumzukommen glaubt, die entstehen müssen, wenn man qualitative Verschiedenheiten durch reine Größenunterschiede auszudrücken vermeint. Punktreihen und

---

1) Grassmann, Ausdehnungslehre, Engel'sche Ausgabe, S. 28.

Punktmengen spielen in der modernen Mathematik eine wichtige Rolle, und man behandelt diese »Gebilde«, als ob die Menge der Punkte ihre charakteristische Eigenschaft sei, die sich sodann zur Deduction anderer Raumbeziehungen verwenden lasse. »Eine Punktmenge besteht aus unendlich vielen Punkten«[1] (wobei die Unendlichkeit von verschiedener Ordnung sein kann) und kann sogar noch sogenannte Verdichtungsstellen enthalten, wo sich die Punkte besonders häufen. Nun behaupte ich aber: Eine Punktreihe oder Punktmenge ist von einem einzelnen Punkte gar nicht verschieden, außer wenn sie neben der Menge von Punkten noch etwas anderes enthält, was qualitativ über die Eigenschaften des Punktes hinausgeht, z. B. lineare oder flächenhafte Ausdehnung. Jeder beliebige Punkt kann als Punktmenge oder als Verdichtungsstelle von beliebiger Stärke aufgefasst werden; und alles, was man mit Hülfe solcher widerspruchsvollen Scheinbegriffe, wie Punktmenge u. s. w., zu erreichen vorgibt, ist lediglich das Product einer logischen Erschleichung. Zwischen Punkt und Linie oder Linie und Fläche besteht ein qualitativer Unterschied, der durch keine quantitative Approximation überbrückt werden kann. Diese falsche Idee des »unräumlichen« Punktes, der doch als Raumelement fungiren muß, ist selbst in der neuesten mathematischen Litteratur nicht beseitigt. Auch Russell sieht eine Antinomie darin, dass Geraden und Ebenen einerseits als Beziehungen von Punkten betrachtet werden müssen (projective Geometrie) während sie anderseits doch aus Punkten bestehen (made up of points). »Ein Punkt muss räumlich sein«, sagt Russell[2], »sonst könnte er nicht die Aufgabe eines Raumelements erfüllen. Anderseits aber darf er doch keinen Raum enthalten, denn besäße er irgend welche endliche Ausdehnung, so wäre er weiterer Zerlegung fähig«. Diese Schwierigkeit in dem sich selbst widersprechenden Begriff des unräumlichen Raumelementes glaubt Russell heben zu können, wenn er jedem geometrischen Satze von vornherein eine gewisse Beziehung zur Materie gibt und das punktuelle Raum-Element durch das Atom ersetzt, da dies ein nicht-

---

1) F. Klein, Vorlesungen über die Anwendung der Differential- und Integral-Rechnung auf Geometrie. Eine Revision der Principien. 1902; S. 36.

2) Russell, The Foundations of Geometry 1897, p. 189.

räumliches einfaches Element sei, welches räumliche Beziehungen zu andern Elementen besitzt[1].

Ein weiterer Widerspruch in der landläufigen Auffassung des Punktes lässt sich am drastischsten in zwei Sätze kleiden, die sich bei Veronese sogar in demselben Axiom zusammengefunden haben, nämlich: Es gibt verschiedene Punkte. Alle Punkte sind identisch[2]. Die Lösung scheint mir hier nicht schwierig; denn es ist klar, dass der zweite Satz einfach nicht wahr ist. Es gibt keine zwei identischen Punkte. Jeder Punkt im Raum ist von allen andern, eben durch seine Lageverhältnisse zu den andern, verschieden.

Bei derartigen Sätzen spielt uns die hergebrachte Auffassung von den abstracten oder Allgemeinbegriffen gar zu leicht einen Streich. Man denkt, jedem Worte müsse eine bestimmte Vorstellung entsprechen. Die Gattungs- und abstracten Begriffe sind aber gar nicht Vorstellungen in diesem Sinne, sie sind abgekürzte Bezeichnungen für complicirte Denkvorgänge. Wenn man von »dem Punkt« im Allgemeinen spricht, so hat man bei diesem Begriffe nicht etwa die Vorstellung von einem allgemeinen Punkt, der nicht hier und nicht dort ist; solche allgemeinen Vorstellungen sind unmöglich; darin hatte Berkeley recht und wird auch recht behalten. Bei dem Allgemeinbegriff des Punktes haben wir die Vorstellung eines speciellen Punktes mit dem Nebengedanken, dass alles, was wir von diesem Punkte aussagen wollen, auch für jeden andern Punkt gültig ist. Von den beiden Sätzen »Alle Punkte sind verschieden« und »Alle Punkte sind identisch« bezieht sich nur der erstere auf die wirklichen Punkte im Raum; der letztere aber, wenn er überhaupt einen Sinn haben soll, kann nur von dem Allgemeinbegriff des Punktes gelten, d. h. dem Worte, unter welchem wir das bei allen Punkten Uebereinstimmende zusammenfassen, welches in diesem Falle noch dazu negativ ist, nämlich dass sie keine Größe haben.

Kehren wir jetzt zur Erörterung der Raumelemente zurück. Wenn man den Punkt zum Raumelement macht, so stellt man damit die ganze Raumanschauung auf den Kopf. Denn der Punkt ist von

---

1) Russel, The Foundations of Geometry 1897, p. 192.

2) (Ass. I Esistono punti distinti — Tutti i punti sono identici.) Giusseppe Veronese, Fondamenti di Geometria, p. 210.

allen Raumbestimmungen die vollkommenste, die am wenigsten einfache oder primäre. Ueberdies sind die Raumgrenzen keine Elemente, aus welchen der Raum besteht. Der Raum ist nicht aus Flächen, Linien, Punkten zusammengesetzt. Und wenn man den Raum mit Hülfe der Bewegung aus den Grenzgebilden abzuleiten sucht — z. B. indem man einen geometrischen Körper als die »Spur« einer bewegten Fläche, eine Kurve als die Spur eines bewegten Punktes betrachtet — so enthält diese Auffassung eine petitio principii, denn die Bewegung setzt den vollen allseitig ausgedehnten Raum voraus. Denn man kann nur allseitig ausgedehnte Körper, nicht aber Ebenen, Linien und Punkte bewegen oder als bewegt denken. Quantitative Raumelemente kann es wegen der Relativität aller Größen überhaupt nicht geben, und qualitativ ist der allseitig ausgedehnte unbegrenzte Raum das Elementarste, Einfachste, das Primäre. Dieses Urbild der Raumanschauung, welches in seiner absoluten Unbestimmtheit gewissermaßen den geometrischen Ort alles Wirklichen und Möglichen darstellt, begleitet jede specielle Raumvorstellung. Die nächste Stufe der Raumbestimmung ist die unbegrenzte Ebene; die dritte wird von der Geraden gebildet, und die vierte und letzte Stufe, und daher die vollendete, absolut eindeutige Raumbestimmung, ist der Punkt. Er bildet somit das letzte und complexeste Glied in der Stufenfolge der Bestimmungen und nicht das erste.

In dem allseitig ausgedehnten Raum, wie er uns als primäre Raumanschauung mit der ersten räumlichen Empfindung des Gesichts- oder Tastsinns gegeben sein muss — welcher jedoch ursprünglich noch nichts von Größen- oder Entfernungsbeurtheilung enthält, da alle Größenschätzung oder Messung auf der Intensitätsvergleichung beruht, die ihrerseits erst nach eingetretener Aenderung (d. i. Bewegung), also »im Laufe der Erfahrung«, sich entwickelt — gibt es unendlich viele Richtungen. Durch gewisse Beschränkung oder Abstraction gelangen wir zu einer engeren Mannichfaltigkeit von Richtungen, auch noch unendlich in ihrer Art, zur Ebene, die jedoch nur deshalb als ein Raumgebilde besonderer Ordnung betrachtet werden kann, weil sie ein Specialfall des Grenzgebildes erster Ordnung, der Fläche, bildet. Durch weitere Beschränkung gelangen wir zur Doppelrichtung der Geraden und endlich zu dem den höchsten Grad räumlicher Bestimmtheit repräsentirenden Richtungsursprung, dem Punkt.

Nun könnte man einwenden, ein allseitig begrenzter Raumtheil, ein Körper repräsentire eine eben so hohe Stufe der Raumbestimmung. Das ist ganz richtig; aber es ist dabei zu bedenken, dass der Körper dies nur thut kraft der ihn begrenzenden Ebenen, Linien und Punkte.

Der Uebergang von einer zur andern »Dimension« im Sinne des geläufigen Gebrauchs dieses Wortes bedeutet also nicht den Wegfall oder den Hinzutritt einer neuen Richtung, sondern den unendlich vieler. Von diesem Standpunkt betrachtet, erscheint auch der weiter oben bei der Erörterung symmetrisch congruenter Raumgebilde behandelte Begriff der Circumversion, des Umklappens in der nächsthöheren Dimension in einem anderen Lichte. Zwei ebene congruente, aber symmetrische Figuren können nur dadurch zur Deckung gebracht werden, dass man die eine derselben »durch die dritte Dimension« in die Lage der anderen überführt. Dieses Ueberführen durch die dritte Dimension aber entpuppt sich bei eingehenderer Betrachtung als ein ungenauer Ausdruck für die Drehung der Ebene, in welcher sich die Figuren befinden, um 180 Grad, also durch alle andern im Raume möglichen Ebenen hindurch. Ebenso bedeutet die Circumversion einer linearen Richtung in der zweiten Dimension einfach eine Drehung in der Ebene um 180 Grad, wobei die »gewendete« Linie alle anderen in der Ebene möglichen Linien successive zu passiren hat. Mit einigen derselben wird sie in einem Stadium der Drehung zusammenfallen, andere wird sie schneiden; aber treffen muss sie alle. In ganz derselben Weise können wir jetzt definiren, was das Umklappen der enantiomorphen Raumgebilde in der vierten Dimension zu bedeuten hätte. Es müsste durch eine Drehung des gegebenen Raumes durch alle andern in der vierdimensionalen Welt möglichen dreidimensionalen Räume hindurch bewerkstelligt werden. Angesichts dieser Definition wird man es begreiflich finden, dass ich die Enantiomorphie lieber als unerklärte und unerklärbare Thatsache acceptire — wie ich das ja überdies mit allen fundamentalen Thatsachen zu thun gezwungen bin — als dass ich sie mit Hülfe des Pseudobegriffes der vierten Dimension zu »erklären« suche. Wenn irgendwo einmal plötzlich eine rechte Schraube in eine linke, ein rechtsdrehender Quarzkrystall in einen linksdrehenden verwandelt würde, so wäre es vom Standpunkte der unparteiischen exacten Wissenschaft immer noch

gerechtfertigter, das Eingreifen einer unbekannten Gewalt anzunehmen, die das rechte Individuum vernichtete und das linke neu schuf, als zur vierten Dimension seine Zuflucht zu nehmen. Denn die erstere Annahme verstößt nur gegen das bisher Beobachtete, die letztere aber gegen die nothwendigen Anschauungs- und Denkgesetze.

Man nimmt gewöhnlich an, dass wir bei der Vorstellung einer Fläche oder Ebene von dem, was man die dritte Dimension nennt, völlig abstrahiren. Wenn man damit aber meint, dass man bei der Vorstellung einer Fläche den die Fläche einschließenden Raum als nicht vorhanden betrachten könne, so scheint mir das eine folgenschwere Verkennung dessen zu sein, was die Abstraction wirklich ist und sein kann. Von dem als nothwendig Erkannten kann man überhaupt nicht abstrahiren. Ein geometrischer Satz, dessen Richtigkeit man eingesehen hat, muss immer und überall gültig sein. Kommt derselbe bei irgend einem Gedankengange überhaupt nicht in Frage, so braucht man auch nicht von ihm zu abstrahiren. Kommt er aber in Frage, so handelt man gegen die Wahrheit, wenn man ihn dennoch nicht berücksichtigt, und die Ergebnisse können niemals Anspruch auf Gewissheit oder wissenschaftlichen Werth machen. Wenn man von etwas Thatsächlichem abstrahirt, so heißt das weiter nichts, als dass man ihm im betreffenden Falle nur geringe oder keine Aufmerksamkeit zuwendet, nicht aber, dass man dasselbe als nicht vorhanden, nicht thatsächlich annimmt. Die Eigenschaften, Verhältnisse und Beziehungen, von welchen man in einem gegebenen Falle abstrahirt, werden nicht etwa als nicht vorhanden betrachtet, sondern sie werden nur möglichst weit aus dem Centrum der Aufmerksamkeit weggerückt. Eine völlige oder auch nur annähernd vollständige Abstraction, die ja der Negirung gleich oder nahe käme, ist eben so wenig möglich wie eine Annäherung an die Null oder eine Annäherung der linearen Größe an den Punkt. Jede, auch die geringste Größe, ist unendlich viel größer als das Nichts, und jede, auch die kleinste Linie, auch wenn man sie in der Maske des Linienelements auftreten lässt, ist, mit genügend starkem Vergrößerungsglas betrachtet, eine große Linie, während der Punkt immer Punkt bleibt. So darf auch die Abstraction niemals zur völligen Vernachlässigung oder Negation werden. Nur so lange man dessen eingedenk bleibt, bilden die Producte der Abstraction recht-

mäßige Glieder in der Kette wissenschaftlicher Schlussfolgerungen. Sobald man die Eigenschaften, Beziehungen etc., von welchen man abstrahirt, so betrachtet, als ob man sie ganz aus dem Bewusstsein escamotiren könne, hat man angefangen, die Thatsachen zu entstellen, zu fälschen.

Aber ganz abgesehen davon, dass eine »völlige« Abstraction ohne Entstellung der Thatsachen nicht möglich ist; es ist nicht einmal richtig, dass wir bei dem Begriffe oder der Vorstellung der Fläche von allen außerhalb der Fläche existirenden Raumeigenschaften und Raumverhältnissen abstrahiren. Der Begriff der Fläche ist von der Vorstellung der Fläche abhängig. Der Allgemeinbegriff der Fläche besteht aus der Vorstellung einer beliebig gewählten speciellen Fläche und der begleitenden Ueberzeugung, dass alles, was man von dieser aussage, auch von allen andern Flächen gelten müsse. Wenn man sagt, »die Fläche etc., so ist das nur ein abgekürzter Ausdruck für »jedes Raumgebilde von der und der Beschaffenheit etc. Also ohne die repräsentirende Vorstellung einer besonderen Fläche ist der Allgemeinbegriff der Fläche nur ein leeres Wort. Die Vorstellung einer Fläche ist nur möglich, wenn der allseitig ausgedehnte Raum hinzu vorgestellt wird. Denn gerade das, was die Fläche zu dem macht, was sie ist, besteht aus Beziehungen zu dem übrigen Raum. Wir abstrahiren daher bei der Fläche keineswegs von dem übrigen Raum überhaupt, sondern nur von gewissen Verhältnissen und Beziehungen desselben. Wenn ich eine Fläche wahrnehme oder mir vorstelle, so muss ich sie stets in eine, wenn auch vielleicht ganz unbestimmte, Entfernung verlegen; es muss also der vor der Fläche gelegene Raum mit vorgestellt werden. Ebenso ist eine Gerade, die doch mit ihrer Richtung identisch ist, das, was sie ist, nur auf Grund ihrer Beziehungen zu anderen Richtungen. Wir abstrahiren bei der Geraden nicht von diesen ihren Beziehungen zu anderen Richtungen sondern nur von den Beziehungen der letzteren unter einander. Fläche, Ebene, Linie, Gerade, Punkt haben einen Sinn nur im allseitig ausgedehnten Raum. Darum sollte man auch die Fläche von rechtswegen definiren als »einen Theil des Raumes, unter besonderer Berücksichtigung der Grenzen desselben, und unter weitgehender, aber nicht vollständiger Abstraction von allem anderen, aufgefasst«. Bei einer Linie handelt es sich um die Concentration des Interesses auf die

gemeinsame Grenze zweier Flächen; und der Punkt als die höchste und eindeutigste Raumbestimmung, die gemeinsame Grenze zweier Linien, setzt die niederen Bestimmungen, Linie und Fläche voraus. Die Definitionen von Linie und Punkt müssen demgemäß recht complicirt ausfallen.

Die unbestimmteste und primitivste Raumanschauung in diesem Sinne ist der allseitig unbegrenzte Raum, der, undifferenzirt und unbeweglich, in gewissem Sinne doch einfach ist, obgleich er unendlich viele Orte und Richtungen enthält. Die nächste Stufe der Raumbestimmung ist die der Raumgrenze erster Ordnung, die unbegrenzte Fläche; dann folgt, mehr und complexere Beziehungen als die vorige enthaltend, als dritte Stufe die unbegrenzte lineare Grenze und als vierte Stufe und Grenze dritter Ordnung die complexeste Raumbestimmung, der definitive Ort im Raum oder der Punkt. Bei geradlinigen und andern Figuren, bei theilweise oder allseitig begrenzten Raumtheilen (Körpern), tritt eine Cooperation aller dieser Raumbestimmungen ein. Wenn man in üblicher Weise den Punkt als das selbst nicht ausgedehnte Raumelement bezeichnet, so hat man damit nicht wirklich den Punkt nach seinen wesentlichen Merkmalen, *sondern nur ganz einseitig eine gewisse Eigenschaft desselben definirt*, die lediglich auf Größenverhältnisse Bezug nimmt.

Ebenso verkehrt wie es ist, die verschiedenen Stufen der Raumgrenzen als etwas zu betrachten, was auch für sich, unabhängig vom allseitig ausgedehnten Raum bestehen könnte, ebenso unrichtig ist es, wenn man sie nur als Abstractionsproducte, als begriffliche Constructionen ansieht, die nicht selbst wahrgenommen werden. Man hat gesagt, Punkte sind in der Anschauung nie gegeben. Das ist offenbar nur insofern richtig, als es den angeblich völlig abstrakten Begriff des Punktes angeht, der ein Unding ist. Der Punkt ohne bestimmte Raum-Beziehungen ist eine eben solche Unmöglichkeit wie die Farbe ohne Licht. Wirkliche und daher mathematische Punkte sind bei jeder räumlichen Wahrnehmung anschaulich gegeben, aber nicht isolirt, als sich selbst genügende Entitäten, sondern als das, was Punkte wirklich sind und nur sein können, als Grenzen von Linien, und da diese nur mit Flächen und die letzteren nur mit allseitig ausgedehnten Raumtheilen gegeben sein können, indirect als Grenzen von Raumtheilen oder Körpern. Alle Raumbestimmungen aber, einfache wie

complexe, vollständige und theilweise Begrenzungen, sind stets nur im allseitig ausgedehnten, unendlichen Raume möglich. Der unbegrenzte, unendliche Raum muss daher bei jeder speciellen Raumwahrnehmung oder Raumvorstellung mitgedacht werden. Der unendliche Raum ist daher auch nicht etwa eine begriffliche Abstraction oder Construction, sondern er ist eine mit jeder Wahrnehmung gegebene Thatsache (Bewusstseinsthatsache), die wir nicht einmal hinwegdenken könnten, wenn wir auch wollten. Nicht die Vorstellung des unendlichen, sondern gerade die des in sich abgeschlossenen endlichen Raumes begegnet unüberwindlichen Schwierigkeiten. Wir sind gezwungen, jeden endlich abgeschlossenen Raumtheil als im unendlichen Raume befindlich vorzustellen.

Wundt hat sehr treffend das Gebiet des Transcendenten in zwei Theile geschieden, das der qualitativen oder imaginären, und das der quantitativen oder realen Transcendenz. Zu der letzteren gehören unendliche Ausdehnung, unendliche Theilbarkeit u. s. w. Dabei erklärt Wundt den, ohne qualitative Aenderung des Vorstellungsinhaltes, rein quantitativ gedachten Regressus ins Unendliche nicht allein für erlaubt, sondern geradezu als nothwendig gefordert. Ich möchte hier noch einen Schritt weiter gehen. Gewiss sind unendliche Strecken, Flächen u. s. w. und unendliche Theilung quantitativ transcendent; nicht aber unendliche Theilbarkeit und die Vorbedingung für den mit Bezug auf specielle Ausdehnungsgebilde geforderten regressus in infinitum, der unendliche Raum selbst. Die unendliche Theilbarkeit jedes Raumtheiles und der unendliche Raum selbst sind bei jeder Wahrnehmung mitgegebene Thatsachen.

Der Begriff des Unendlichen ist in der Mathematik wie in der Philosophie keineswegs so klar, wie man bei seinem mannigfachen Gebrauche annehmen sollte. Das geht schon daraus hervor, dass er gewöhnlich so gebraucht wird, als ob er einen contradictorischen Gegensatz des Endlichen bilde. Nun sind aber endlich und unendlich nur der sprachlichen Form nach contradictorische, in Wirklichkeit aber conträre Gegensätze, zwischen welchen mannigfache Zwischenstufen existiren. Wenn man unter Endlichkeit allseitige Begrenztheit und unter Unendlichkeit allseitige Unbegrenztheit[1]) versteht,

1) Der Ausdruck »unbegrenzt« darf natürlich nicht in dem weiter oben verworfenen Sinne von »selbstbegrenzend, oder in sich zurückkehrend« genommen werden.

dann sind eine Linie von gegebener Länge, eine geschlossene ebene Figur und ein geometrischer Körper allerdings endlich, eine auf beiden Seiten unbegrenzte Gerade, eine in jeder ihrer Richtungen unbegrenzte Ebene und der allseitig ins Unbegrenzte ausgedehnte Raum aber unendlich. Wie aber bezeichnet man nun eine Linie, die sich von einem gegebenen Punkte ins Unendliche erstreckt? Sie ist offenbar nach einer Richtung hin unendlich, nach der andern endlich. Ebenso lässt sich jeder Flächenwinkel in der Richtung seiner Oeffnung als unendlich betrachten. Der Schattenkegel, den ein größerer Körper in dem Lichte eines kleineren wirft, ist in der Richtung der Fortpflanzung des Lichtes unendlich, in allen anderen Richtungen aber endlich. Es gibt also auch eine partielle Unendlichkeit; und wenn man Unendlichkeit nicht ausdrücklich im Sinne von partieller Unbegrenztheit definirt, in welchem Falle man eine andere Bezeichnung für die allseitige Unendlichkeit einzuführen verpflichtet ist, so kann man nicht sagen, dass das, was nicht unendlich sei, endlich sein müsse. Selbst Kant ist in den Antinomien diesem auf der kritiklosen Hinnahme geläufiger Ausdrücke beruhenden Irrthum zum Opfer gefallen, und zwar gleich bei dem Beweis der Thesis der ersten Antinomie, die in gewissem Sinne als grundlegend für die ganze Beweisführung in den Antinomien gelten kann. Die Welt soll einen Anfang in der Zeit haben, denn wenn man annehme, die Welt habe der Zeit nach keinen Anfang, so sei ja »bis zu jedem gegebenen Zeitpunkt eine Ewigkeit abgelaufen«. Nun besteht aber, so sagt Kant weiter, »darin die Unendlichkeit, dass sie durch successive Synthesis niemals vollendet werden kann«. Es ist ganz offenbar, dass Kant hier die einseitige lineare Unendlichkeit mit der all- (d. i. hier zwei-) seitigen verwechselt. Er hätte gerade so gut behaupten können: Es ist unmöglich, dass eine gerade Linie auf der einen Seite einen Endpunkt habe und auf der andern sich in die Unendlichkeit erstrecke. Denn wäre dies möglich, so wäre die gerade Linie ja unendlich und hätte doch einen Endpunkt.

Eine Verwechselung der einseitigen und allseitigen Unendlichkeit, scheint mir auch bei den in der projectiven Geometrie gemachten Annahmen hinsichtlich der uneigentlichen Grundgebilde vorzuliegen. Man definirt als Strahlenbüschel den Inbegriff aller durch einen Punkt gehenden Geraden. Die Gerade oder der Strahl ist demnach als nach

beiden Seiten unendlich zu denken. Um nun aber bei der Zuordnung von Punktreihe und Strahlenbüschel der Schwierigkeit zu entgehen, die dadurch entsteht, dass jedes Büschel einen Strahl mehr hat als der Träger einer Punktreihe Punkte besitzt, nimmt man an, dass derjenige Strahl eines Büschels, welcher zu einer gegebenen Punktreihe parallel ist, mit der letzteren einen, und nur einen, uneigentlichen, d. i. in unendlicher Ferne gelegenen, Punkt gemein habe. Hierbei rechnet man offenbar mit einem nur einseitig unendlichen Strahl, denn sonst müsste man doch, die absolute Gleichberechtigung der beiden antagonistischen Richtungen der Geraden anerkennend, annehmen, dass der Parallelstrahl die Punktreihe in zwei unendlich fernen Punkten schneide. Der diesem Widerspruch zu Grunde liegende Irrthum besteht offenbar in der Identificirung von »Strahl« und »Gerade«. Wenn man unter »Strahl« den elementaren Begriff der »Richtung« versteht — und die Geometrie der Lage sollte doch von wirklich, nicht weiter zerlegbaren Begriffen, Elementen, ausgehen — dann sind Strahl und Gerade durchaus nicht gleichbedeutend. Jede Gerade ist dann ein aus zwei Richtungen bestehender Doppelstrahl. Von parallelen Strahlen oder Richtungen darf man wohl sagen, dass sie nach einem unendlich fernen gemeinsamen Punkte convergiren, nicht aber von parallelen Geraden.

Die Confusion von Richtung und Doppelrichtung hat aber einen ganzen Rattenkönig von Absurditäten im Gefolge. Nicht nur muss man annehmen, dass eine Gerade nur einen unendlich fernen Punkt habe, sondern es müssen auch die sämmtlichen, den Geraden einer Ebene adjungirten Punkte wieder in einer einzigen unendlich fernen Geraden liegen. Denn wäre das nicht der Fall, lägen sie in einer unendlich fernen gekrümmten Linie, so müsste man ja zwei Punkte dieser Kurve durch eine eigentliche Gerade verbinden, also eine Gerade mit zwei uneigentlichen Punkten ziehen können. So giebt es also zwei Arten von Geraden, nämlich eigentliche, die unendlich viele eigentliche und einen uneigentlichen Punkt haben, und uneigentliche, die nur aus uneigentlichen Punkten bestehen und keine bestimmte Richtung besitzen. Eine Gerade, die keinen eigentlichen Punkt besitzt und keine Richtung repräsentirt, ist aber für den gesunden Menschenverstand ein ganz ähnliches Ding wie ein Messer ohne Heft und Klinge. Da jede Ebene nur eine solche

uneigentliche Gerade haben kann, so müssen diese unendlich fernen Geraden auch alle in einer einzigen Ebene liegen. Der Raum hat demnach nur eine einzige unendlich ferne Ebene. Aber obgleich man dieser uneigentlichen Ebene keine bestimmte Lage zuschreiben kann, so ist sie doch eines ganz bestimmten Verhaltens andern ins Unendliche reichenden Raumgebilden, z. B. den geradlinigen Flächen zweiter Ordnung, gegenüber fähig. Sie schneidet das einschalige Hyperboloid — einerlei welche Lage im Raum es hat — in einem Kegelschnitt und tangirt das hyperbolische Paraboloid. Wenn die projective Geometrie den Anspruch erheben will, eine reine Ausdehnungslehre zu sein, so sollte sie, da die Ausdehnung nur in der Anschauung gegeben sein kann, das Gebiet der Anschauung auch nicht verlassen; denn alle Ausdehnungsbegriffe, die nicht angeschaut oder vorgestellt werden können, sind Pseudobegriffe. Es ist bedauerlich, dass man selbst in der projectiven Geometrie jene einseitige »analytische« Symbolik nicht ganz aufzugeben vermag, die um die Glätte der Formel zu retten der Anschauung einen Fußtritt versetzt.

Auch vom Standpunkt der Himmels-Mechanik hat man geglaubt die Nothwendigkeit der Dreidimensionalität des Weltenraumes darthun zu können. Man hat gesagt: Nur in einem dreidimensionalen Raume erscheint das Newton'sche Gravitationsgesetz als das vernünftigste aller möglichen; denn nur unter Annahme dreier Dimensionen ist die Weltordnung unabhängig von der absoluten Größe ihres Maßstabes[1]. Nur im dreidimensionalen Raume lässt sich nach dem Newton'schen Gesetz mit Massen, Entfernungen und Geschwindigkeiten verfahren, unter gleichzeitiger Annahme der Relativität aller Größen. Dies ist im Grunde ein sehr schwerwiegendes Argument, denn die Relativität aller Größenbeurtheilung und Messung, oder was dasselbe ist, das Wundt'sehe Beziehungsgesetz, ist nicht etwa eine vage Theorie oder eine Träumerei der Philosophen, sondern eine uns auf Schritt und Tritt begleitende Thatsache, die nur der leugnen könnte, der im Stande wäre für irgend eine Messung oder Größenbeurtheilung ein absolutes Maß zu erbringen. Leider aber sind die übrigen mathematischen Voraussetzungen, die jener Argu-

---

1) Siehe Liebmann, Analysis der Wirklichkeit, S. 66 f.

mentation zu Grunde liegen, nicht stichhaltig, wie ich an der Hand der ursprünglich von Laplace herrührenden, von Liebmann in einer Anmerkung gegebenen Rechnungsweise zeigen möchte, indem ich mich gleichzeitig im Uebrigen der von Liebmann geübten philosophischen Kritik des Arguments anschließe.

Nach dem Gravitationsgesetz ist die von einem Himmelskörper auf einen andern ausgeübte Anziehungskraft, wenn r der Radius des anziehenden Himmelskörpers, und e die Entfernung von dem angezogenen ist, proportional dem Bruche $\frac{r^3}{e^2}$. Die durch diese Anziehung in der Zeiteinheit geleistete Arbeit, d. i. die centripetale Verschiebung des angezogenen Körpers sei $= s$. Wenn man sich nun die ganze Situation in n-fach vergrößertem Maßstab denkt, d. h. alle linearen Größen mit n multiplicirt, so erhält man für die Anziehungskraft $\frac{(nr)^3}{(ne)^2} = \frac{n^3 \cdot r^3}{n^2 \cdot e^2} = n\frac{r^3}{e^2}$, und für die centripetale Verschiebung $n \cdot s$. Das heißt, es bleibt alles beim Alten: Der absolute Größenmaßstab hat im dreidimensionalem Raume keinen Einfluss auf das Gravitationsgesetz. Das wäre alles ganz schön; leider aber hat diese Formel zwei große Fehler. Nämlich erstens ist sie keineswegs ausschließlich für eine dreidimensionale Mannigfaltigkeit gültig, und zweitens ist sie in Bezug auf die Massenberechnung — falsch.

Hinsichtlich des ersten Punktes ist leicht ersichtlich, dass nicht bloß im obigen Falle »alles beim Alten bleibt«, sondern in jedem Falle, wo der den Maßstab der Vergrößerung ausdrückende Factor im Zähler des Bruches in der nächsthöheren Potenz erscheint als im Nenner. Die Metamathematiker könnten also ganz folgerichtig einwenden, auch in einem n-dimensionalen Raum wäre die Gravitation von dem absoluten Werth der Entfernungen und Ausdehnungen unabhängig, wenn die Massen durch die $n$te Potenz auszudrücken wären und die fernwirkenden Kräfte mit der $n-1$ten Potenz der Entfernung abnähmen.

Die gerügte Unrichtigkeit der Formel aber besteht darin, dass bei der Vergrößerung des Maßstabes die Massen auch vergrößert werden. Das ist aber offenbar nicht gestattet, wenn man zur Demonstration der Relativität alle linearen Größen mit einem constanten Factor multiplicirt. Haben wir eine Kugel vom Radius r und messen

die Masse derselben, proportional dem Volum, mit r^3, so sind bei einer Kugel vom Radius rn die räumlichen Proportionen mit der übrigen Welt nicht erhalten, wenn ihre Masse $= r^3 n^3$ ist. Sind auch alle andern Größen-Beziehungen in ihren Verhältnissen ungeändert geblieben, so ist dies bezüglich der Masse nicht der Fall; denn diese ist hinsichtlich ihrer Dichtigkeit absolut dieselbe geblieben. Will ich mir im ganzen Universum alle räumlichen Ausdehnungen und Entfernungen im gleichen Maße vergrößert denken, so muss ich das auch auf den Abstand der Massentheilchen von einander ausdehnen. Die Masse, die ja an und für sich nichts Räumliches ist, muss dann ungeändert bleiben. In der obigen Formel aber bleibt nicht, wie behauptet, bei Einführung des Factors n alles beim Alten, sondern es resultirt vielmehr eine größere Masse und ein nicht in derselben Proportion vermehrtes Quantum geleisteter Arbeit in Gestalt der centripetalen Verschiebung.

Ueberhaupt sind Materie und Masse Begriffe, die, sobald man ernstlich versucht, sie eindeutig zu definiren, mit der Thatsache der Relativität aller Raumgrößen in unlösbare Widersprüche gerathen. So beispielsweise verliert das »Gesetz« der Erhaltung der Quantität der Materie, vom Standpunkte der Größenrelativität betrachtet, ganz seine Bedeutung, wie wir im Nachstehenden, an eine bekannte, wenn ich mich nicht irre, zuerst von Condillac stammende Ueberlegung anknüpfend, noch zeigen wollen.

Man setze den Fall, der liebe Gott reducire in der Nacht, während wir alle schliefen, die räumliche Ausdehnung des ganzen Universums oder auch nur desjenigen Theiles, der unseren Sinnen und Instrumenten zugänglich ist, auf ein Hundertmillionstel des jetzigen Maßstabes, aber ohne an den gegenseitigen Raum-Verhältnissen das Geringste zu ändern. Die Erde hätte dann kaum die Größe einer Kegelkugel, und wir Menschen wären noch viel kleiner als die winzigsten Infusorien oder Bacterien[1]. Wenn wir nun am nächsten Morgen aufwachten, würden wir die Veränderung bemerken? Gewiß nicht, denn dazu hätten wir auch nicht den geringsten Anhaltspunkt, da alles im selben Maßstabe verkleinert wäre. Wir

---

1) Ob man sich gleichzeitig mit den Raumgrößen auch die Zeit- und Intensitätsgrößen entsprechend verringert denkt oder nicht, thut hier nichts zur Sache.

fänden uns und unseres Gleichen ganz wie zuvor 5 bis 6 Fuß groß. Der Kölner Dom wäre genau wie sonst über 150 m hoch, und das Pariser Normalmeter wäre immer noch ein Zehnmillionstel eines Erdmeridianquadranten.

Es ist übrigens gar nicht nöthig, dass der liebe Gott uns dieses Glück oder Unglück im Schlaf befallen lässt. Die ganze Procedur kann vor unseren Augen vorgenommen werden und wir können nicht das Geringste davon merken. Ja, die absolute Größe der uns bekannten Welt kann fortwährenden und enormen Schwankungen ausgesetzt sein, ohne dass es uns je zum Bewusstsein kommt. So wissen wir also nicht allein nichts über die absolute Größe der Welt und ihrer Theile, sondern wir sind auch nicht einmal sicher, dass diese Größe constant bleibt. Wir haben auch kein Mittel es jemals festzustellen. Wenn aber die absolute Größe dessen, was wir den uns bekannten Theil des Universums nennen, unbeschadet der Erhaltung der von uns wahrgenommenen Größenverhältnisse, variiren kann; wenn die Welt auf ein Milliontel ihres Volums zusammenschrumpfen oder sich bis zum Millionenfachen ausdehnen kann, ohne dass es der beobachtende und messende Mensch gewahr wird, was für einen Werth hat es dann noch, von einer Erhaltung der Quantität der Materie zu sprechen? Man mag sich die Materie denken wie man will, in allen Fällen kommt man in Conflict mit der Thatsache der Relativität der Raumgrößen.

Sehen wir uns die vorhandenen Möglichkeiten etwas genauer an. Das, was die Materie constituirt, füllt entweder den Raum ganz aus, oder es füllt einen Theil des Raumes aus, oder endlich es nimmt überhaupt keinen Raum ein. Es gibt außer diesen dreien, die Grundannahmen der Continuitätshypothese, der Atomistik und der dynamischen Theorien bildenden Möglichkeiten keine weiteren.

Fassen wir die Materie als Continuum auf, so bedeutet jede Volumverminderung der Welt auch eine Verringerung der Quantität der Materie. Man darf sich hier auch nicht durch die Einschmuggelung des Dichtigkeitsbegriffes zu helfen suchen, denn Continuum und Dichtigkeit sind Begriffe, die sich gegenseitig aufs bestimmteste ausschließen. Wenn es erlaubt wäre, innerhalb eines Continuums Dichtigkeitsdifferenzen anzunehmen, dann ließe sich eine unendlich ausgedehnte, continuirliche Materie denken, die doch eine endliche Masse, oder

endliches Gewicht hätte (z. B. wenn die Dichtigkeit im Centrum ein Maximum hat und von da mit der vierten Potenz der Entfernung oder in irgend einer Weise dergestalt abnimmt, dass die Maßzahlen der Massen der einander umschließenden Kugelschalen eine convergente Reihe bilden).

Füllt die Materie den Raum nur theilweise aus, so haben wir es mit irgend einer Form von Atomen, discreten Theilchen, zu thun, die, wenn sie auch aus irgend welchen Gründen für unzerlegbar ausgegeben werden, doch Ausdehnung besitzen müssen; denn sonst nehmen sie ja überhaupt keinen Raum ein. Werden nun bei der Verringerung aller Raumgrößen auch die in ihrer Zahl natürlich nicht verminderten Atome kleiner, d. h. ihr Gesammtvolum geringer, so bleibt offenbar die Quantität der Materie nicht erhalten, sondern sie wird auch reducirt. Behalten aber die Atome selbst ihre Größe bei und werden nur ihre Abstände, die Zwischenräume zwischen ihnen, vermindert, dann sind damit natürlich die relativen Raumverhältnisse geändert. Also mit der Annahme von Atomen ist die Relativität aller Raumgrößen eben so wenig zu vereinen wie mit der Continuitäts-Hypothese.

Nimmt man endlich zu rein dynamischen Theorien seine Zuflucht, so werden die Atome zu selbst nicht ausgedehnten Kräfte-Centren, also zu Punkten. Aus Punkten aber setzt sich überhaupt keine Quantität zusammen, nicht einmal eine rein räumliche. Daher darf man in diesem Falle der Materie entweder gar keine Quantität zuschreiben, womit natürlich auch die Forderung der Constanz derselben in Fortfall kommt, oder aber man muss zugestehen, dass es nicht die punktuellen Kräftecentren selbst sind, die das constituiren, was man die Quantität der Materie nennt, sondern dass es die Wirkung derselben in dem umgebenden Raum ist. Für diese räumlichen Wirkungsbereiche gilt aber dann genau dasselbe, was weiter oben für die Atome demonstrirt wurde. Werden sie bei der allgemeinen Raumreduction auch verringert, so wird eben dadurch die Quantität der Materie vermindert. Bleiben sie aber constant, dann sind die räumlichen Verhältnisse nicht durchweg erhalten geblieben.

Es lässt sich somit in keinem Falle die Lehre von der Erhaltung der Quantität der Materie mit der Thatsache der Relativität aller Raumgrößen widerspruchslos vereinen. Da man aber in der Natur-

wissenschaft noch immer gewöhnt ist, das direct im Bewußtsein Gegebene, das Psychische, aus dem Physischen zu erklären, anstatt umgekehrt, so fällt es heute keinem Menschen ein, das hypothetische Erhaltungsgesetz, mit dem man vertraut ist, in Zweifel zu ziehen zu Gunsten des Relativitätsgesetzes, dessen unumstößliche Thatsächlichkeit noch keineswegs eingesehen zu sein scheint. Wenn man aber die verschiedenen Erhaltungshypothesen der Physik einmal psychologisch bis in ihre letzten Elemente zerlegen wird, dann wird, so glaube ich, als Thatsache nichts übrig bleiben als die Erhaltung des bei allem Wechsel der Erlebnisse unausgesetzt mit Empfindungen angefüllten Gesichts- und Tastfeldes, mit andern Worten »die Erhaltung des Raumes.«

Schluss.

Wir haben den Beweis zu führen gesucht, dass die im gewöhnlichen Leben und in der mathematischen Wissenschaft allgemein anerkannte Dreidimensionalität des Raumes eine conventionelle, nicht in der Natur des Raumes begründete Voraussetzung ist und dass die auf die unkritische Annahme des Dimensionsbegriffes aufgebauten »Ueberräume« der Mathematiker Producte unberechtigter Speculationen sind. Nun könnte man einwenden, diese Ergebnisse der fortschreitenden mathematischen Entwicklung seien hypothetischer Natur und die Mathematik habe wie jedes andere Lehrgebäude das Recht zur Construction von Hülfsbegriffen und zur Aufstellung brauchbarer Hypothesen. Demgegenüber muss aber betont werden, dass wir dem conventionellen Dimensionsbegriff seine Nützlichkeit und praktische Verwendbarkeit durchaus nicht absprechen. Wir verlangen nur, dass er nicht als etwas aus der Natur des Raumes mit Nothwendigkeit folgendes ausgegeben werde, damit keine Entstellung des wirklichen Thatbestandes der Gesetze der Raumanschauung verursacht wird.

Den metageometrischen Theorien aber soll daraus kein Vorwurf entstehen, dass sie hypothetische Elemente enthalten, also »Sache des Glaubens« sind, und wir sind gewiss die letzten, sie aus diesem Grunde zu verdammen[1]. Wir sind, im Gegentheil, der Ansicht, dass der

---

1) Siehe auch die unter dem Pseudonym C. E. Rasius veröffentlichte, populärphilosophische Schrift: Rechte und Pflichten der Kritik. Kapitel über Wissen u. Glauben.

Glaube nicht bloß im gewöhnlichen Leben, sondern auch in der Wissenschaft eine viel größere Rolle spielt, als man ihm in der Regel zuzuschreiben geneigt ist. Bei allen einen Zweck verfolgenden Handlungen reagiren wir auf »Glauben« und nicht auf »Gewissheit«. Gewissheit ist Ausgangspunkt und Ziel unseres Handelns, die Triebkraft ist der Glaube. Auch in der exactesten wissenschaftlichen Forschung regirt der Glaube jeden Schritt, den wir ausführen. Sind auch die Ergebnisse absolut gewiss, der Weg zu ihnen ist mit Glaubenssätzen gepflastert.

Selbst der Mathematiker kann des Glaubens nicht entrathen. Gern geben wir apodictische Gewissheit der geometrischen Axiome (die an ihrer absoluten Einfachheit und Unzerlegbarkeit ebenso erkennbar sind wie die qualitativen Elemente der Sinneswahrnehmung) und der aus ihnen widerspruchslos abgeleiteten Sätze zu. Aber wir behaupten, dass der Mathematiker gar keine Veranlassung hätte, von einem als gewiss erkannten Satze ausgehend, nach neuen Gewissheiten und Nothwendigkeiten zu suchen, wenn ihm nicht der Glaube den Antrieb gäbe. Und nicht bloß den Antrieb giebt er, er weist ihm auch die Richtung bei der fortschreitenden Forschung.

Nicht weil sie Hypothesen, Glaubenssache, sind, verwerfen wir die metageometrischen Theorien, *sondern weil sie auf widerspruchsvollen Scheinbegriffen und Pseudo-Unterscheidungen aufgebaut sind*. Denn *das, was einen Widerspruch enthält, kann und darf man nicht glauben*. Die heutige Mathematik läuft Gefahr, sich in eine dem gesunden (ich meine nicht dem gemeinen) Menschenverstande entfremdete analytisch-formalistische Symbolik zu verlieren. Es ist daher erwünscht, dass den allzuhoch fliegenden Speculationen die wächsernen Flügel ein wenig schmelzen, damit sie sich nicht zu weit entfernen von dem Ausgangsgebiet aller mathematischen Forschung, von dem Gebiete, dem allein Nothwendigkeit innewohnt: *der Geometrie des gegebenen Raumes*.

Wir geben nachstehend eine kurze Zusammenfassung der Hauptpunkte unserer Darlegungen, und zwar ohne besondere Scheidung von Neuem und Bekanntem:

I. Die Raumanschauung im Allgmeinen betreffend:

1) Der allseitig ausgedehnte Raum ist zwar quantitativ unendlich theilbar, qualitativ aber absolut einfach und unzerlegbar. Er ist die Bedingung aller speciellen Raumvorstellungen.

2) Es gibt keine andere Ausdehnung als den Raum. Alles, was ausgedehnt ist, ist allseitig ausgedehnt. Die für einseitig oder mehrseitig ausgedehnt ausgegebenen »Gebilde« wie Linie, Ebene, Fläche, sind nur im allseitig ausgedehnten Raume denkbar, und zwar als Grenzen von Raumtheilen. Wenn man bei der Vorstellung allseitig ausgedehnter Raumtheile die Aufmerksamkeit vornehmlich auf die Grenzen richtet, so entsteht die Vorstellung der Fläche, der Linie, des Punktes. Es ist nicht wahr, dass man sich Flächen, Linien oder Punkte unter vollständiger Abstraction von dem allseitig ausgedehnten Raume vorstellen oder denken könne.

3) Der Punkt ist nicht das Raumelement. Wie der allseitig ausgedehnte unendliche Raum qualitativ einfach und quantitativ complex ist, so ist umgekehrt der Punkt, d. i. die vollkommenste Ortsbestimmung im Raum, quantitativ zwar einfach, aber qualitativ complex.

Da der Raum unendlich theilbar ist, so kann er keine letzten Elemente besitzen. Jeder, auch noch so kleine Raumtheil ist allseitig ausgedehnt. Die Raumgrenzen Fläche, Linie, Punkt, sind unter einander und von dem allseitig ausgedehnten Raume qualitativ verschieden. Jede Richtung im Raum ist von jeder andern Richtung in einer Art verschieden, welche durch reine Größenbegriffe nicht ausgedrückt werden kann.

Die Ausdrücke Linien- und Flächen-Element, Punktreihe, Punktmenge u. s. w. sind aus der Verkennung der qualitativen Eigenschaften des Räumlichen hervorgegangene Scheinbegriffe.

4) Die Ausdehnung ist an und für sich nicht Größe; sie wird es erst dadurch, dass auf Grund der Aenderung, die wir Bewegung nennen, die Intensitätsvergleichung auf sie angewendet wird. Es gibt keine anderen als intensive Größen. Auch der Raum, die Extension, ist als Größe intensiv (gemessen durch die Intensität von gewissen Empfindungen). Alles Messen ist daher in letzter Instanz ein Messen intensiver Größen.

5) Es ist eine reine Ausdehnungslehre, unabhängig von jeder Größenbetrachtung, wohl möglich. Dagegen ist eine ganz reine Größenlehre, da die Vergleichung des Intensiven stets räumliches Auseinandersein voraussetzt, nicht denkbar. Bei der sogenannten reinen Größen- und Zahlenlehre abstrahirt man möglichst weitgehend von allen Richtungen im allseitig ausgedehnten Raum mit Ausnahme einer einzigen. Es liegt daher der letzte Grund aller apodictisch gewissen (nothwendigen) Urtheile doch in der Raumanschauung.

6) Die Wundt'sche Lehre von den complexen Localzeichen lässt nicht nur hinsichtlich des Problems der eindeutigen und widerspruchslosen räumlichen Ordnung der Gesichts- und Tastwahrnehmungen nichts zu wünschen übrig, sondern sie wird auch den, unabhängig von der speciellen Sinnespsychologie, aus rein erkenntniss-theoretischen Betrachtungen über die Raumanschauung resultirenden Forderungen von allen Theorien am besten gerecht, indem sie, unter Annahme einer gewissen Modification, sowohl der rein qualitativen Urnatur der räumlichen Ausdehnung, wie der entwicklungsfähigen quantitativen Betrachtung der räumlich-intensiven Größe gebührend Rechnung trägt.

II. Die Lehre von den Dimensionen betreffend:

7) Der rein analytisch definirte Dimensionsbegriff hat mit der räumlichen Ausdehnung nicht mehr zu thun als der Begriff der unabhängigen Variabeln; er geräth überdies in direkten Widerspruch mit den räumlich definirten Begriffen der Dimension. Der »n-dimensionale Raum« ist nur ein unpassender und irreführender Ausdruck für die »Mannigfaltigkeit mit n unabhängigen Variabeln«.

8) Der auf die Möglichkeiten der Raumbegrenzung aufgebaute Begriff der Dimension ist in der Natur der Raumanschauung begründet. Er ist jedoch weder geometrisch noch analytisch als Hülfsmittel der Demonstration und Rechnung verwendbar, da die so abgeleiteten Dimensionen weder den Charakter der »Größe« besitzen, noch sich als »Richtungen« im Raume betrachten oder aufzeigen lassen. Außerdem sind sie weder coordinirt, noch vertauschbar.

Adoptirt man diesen Dimensionsbegriff, so kann man nach der Anzahl der Stufen der Raumbestimmung vier Dimensionen zählen, vom allseitig ausgedehnten Raum bis zum Punkt; oder drei, wenn man den Punkt nicht als solche Stufe gelten lassen will. Da diese Stufen der Raumbestimmung völlig heterogen sind, so wäre es willkürlich und sinnlos, von ihnen ausgehend, weitere Dimensionen zu fordern.

9) Auch auf die Analogie zwischen den Potenzen einerseits und den Flächen- und Körpermaßen anderseits, lässt sich keine stichhaltige Definition der Dimension gründen.

10) Der geläufigste aller Dimensionsbegriffe, der mit Bezug auf Grundrichtungen und Coordinaten definirte, ist rein conventioneller Natur und in dem Wesen der Raumanschauung nicht begründet. Es gibt im Raume von jedem Punkte aus unendlich viele Richtungen; keine derselben aber hat ein Vorrecht vor den andern, als Grundrichtung angesehen zu werden. Man kann daher eine beliebige Anzahl von Richtungen als Dimensionen wählen. Des Oeconomieprincipes halber wird man jedoch die Anzahl derselben möglichst reduziren. Da zur eindeutigen Bestimmung eines Ortes im Raum (Punktes) mindestens vier Bestimmungsstücke nöthig sind, so sollte man nicht weniger als vier Dimensionen annehmen. Bei den gebräuchlichen sogenannten dreifachen Coordinatensystemen ist das vierte Bestimmungsstück hinter der Wahl der positiven und negativen linearen oder Winkel-Richtungen versteckt.

11) Wählt man die drei auf einander senkrechten Doppelrichtungen des gebräuchlichen Coordinatensystems als Dimensionen, dann ist in der Definition schon die Möglichkeit einer vierten und höherer Dimensionen vollständig ausgeschlossen.

Lässt man dagegen Dreiheit und Orthogonalität fallen, dann ist der Anzahl der Dimensionen allerdings keine Grenze gesetzt. Aber sie beziehen sich dann alle auf den gegebenen Raum, der, je nach der gewählten Anzahl der Grundrichtungen, als vier-, fünf- oder n-dimensional betrachtet werden kann. Die Ausdrücke »vierte Dimension«, »Raum von n-Dimensionen« u. s. w. sind in allen Fällen, wo sie sich nicht auf den gegebenen Raum beziehen, Träger von trügerischen Scheinbegriffen.

12) Ein Schein von Berechtigung entsteht für die metageometrische Speculation bei dem Versuche, die Erscheinungen der Enantiomorphie mit dem Princip der allgemeinen Naturcausalität in Einklang zu bringen. Vom strengsten wissenschaftlichen Standpunkte aus sollte aber hier das Zugeständniss der Unerklärbarkeit der Thatsachen einwurfsfreier erscheinen als die Zuflucht zu begrifflichen Constructionen, die einer streng logischen Kritik nicht Stand halten.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

